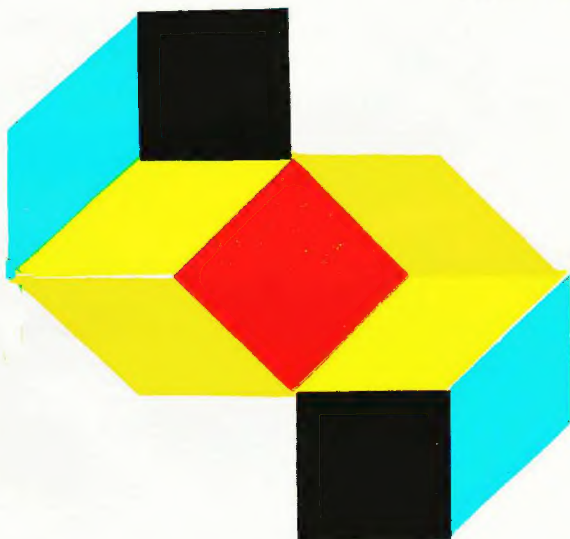
数学小丛书
智慧之花

等周问题与夫妇入座问题

丁石孙 主编



北京大学出版社

数学小丛书——智慧之花

(1)

等周问题与夫妇入座问题

丁石孙　主编

北京大学出版社

内 容 提 要

在一个三角形内，周长相同的图形中哪一个面积最大？n 对夫妇围圆桌而坐，男女相间夫妇不相邻，有多少种坐法？熟知的筹码游戏的获胜策略是怎样想出来的？$1^{-2}+2^{-2}+3^{-2}+4^{-2}+\cdots=$？复数项的条件收敛级数重排后能收敛到任意一个复数吗？如何才能使数学易懂？……19 篇译文对这些并不陌生的问题提出了巧妙、新颖、富有思想、与众不同的回答. 你可能很想知道奥赛优胜者在赛场上是如何解题及他们参赛的心情，那么就请看我国参加第二十九届奥赛的两位选手所写的文章.

数学小丛书——智慧之花

(1)

等周问题与夫妇入座问题

丁石孙 主编

责任编辑：刘 勇

*

北京大学出版社出版

（北京大学校内）

北京大学印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

787×1092毫米 32开本 6.625印张 130千字

1990 年 2 月第一版 1990 年 2 月第一次印刷

印数：0001—5,000册

ISBN 7-301-01002-8/O・171

定价：2.85 元

《数学小丛书——智慧之花》编委会

写在前面的话

在一个人所受的基础教育中，数学一直是占着一个特殊地位的，它占用的时间可以说是最多的. 也许因为这已是历史上长期以来形成的事实，所以很少有人去作说明，即使有的学生并不喜欢数学，也鼓不起勇气去问个为什么.

数学由于其特殊的形式，给人的印象常常是：一批口诀，一堆公式以及一串定理，但它们在解决生活及其它学科的问题时又是很有用的，于是多数人就硬着头皮按老师教的学下去. 这样的理解至多对了一半，因为数学还有另一个方面的重要作用，这就是通过对数学知识的介绍，对数学问题的解决，教会人们一种重要的分析问题，解决问题的思想方法. 简单地讲，数学要教会人如何进行逻辑推理，如何进行正确的抽象思维，如何在纷繁的事物中抓住主要的联系，并如何使用明确的概念，等等.

要正确发挥数学课程的教育功能，除去需要教师与学生的积极努力以外，也还需要找到适当的辅助材料和恰当的方法. 我们选编这套《数学小丛书——智慧之花》就是为了从这个方面为数学老师（主要是中学的老师）和大学生提供一点帮助，有一部分也可以用作中学生的课外读物.

我们并不认为目前的数学教学大纲的内容太少，太浅，因而要增加或加深教学内容. 我们更不想给学生增加习题量以

应付考试. 恰恰相反，我们认为再向这个方向发展将会造成极大的危害. 通过我们选择的这些小文章，我们希望能帮助读者对数学有更全面的了解，使大家发现数学不只是“定义、定理、公式、证明”的刻板叙述，而是生动活泼、引人入胜的思维训练. 在这里，读者可以看到如何对各种各样的问题进行精细的分析，又如何逐步把复杂的问题理出头绪，最后给出清晰的答案. 总之，我们希望通过千姿百态的分析与讨论帮助读者了解什么是大家应该从数学学习中学到的思想方法.

我们的目标是这样，但能否达到还有待于实践的检验. 读者读过这些书之后的印象与收获将作出评判. 我们希望大家多提批评意见，帮助我们不断改进我们的工作.

丁石孙

一九八九年二月

出 版 说 明

现代数学,这个最令人惊叹的智力创造,已经使人类心灵的眼光越过无限的时间,使人类心灵的手延伸到了无边无际的空间.

——N. M. Butler

数学方法渗透进并支配着一切自然科学的"理论"分支.在现代经验科学中,它已越来越成为衡量成就的主要标准.

——J. von Neumann

参与开发一般智力——不是为了今后某一职业的特定需要,应看成是数学教育的基本目标.

——F. Reidt

别把数学想象得那么困难和艰涩,并认为它排斥常识,数学仅仅是常识的一种微妙的形式.

——L. Kelvin

这些著名学者的话表达了我们出版《数学小丛书——智慧之花》的想法和努力的目标.

本丛书的主要对象是:中学数学教师、数学各专业的低年级大学生、部分高中学生以及数学爱好者.所选内容力求生动、有趣,在开始阶段以翻译为主,一年 2—3 册.

我们希望本丛书能为活跃与推动中学与大学低年级的数学教学、提高中学教师和大学生的数学素质、更好地沟通中学数学与大学数学以及普及数学知识,做一点有益的工作.

我们水平有限，希望大家多提意见，为了让我们的小花开放得绚丽多姿而共同努力！

《数学小丛书——智慧之花》编委会

一九八九年二月

目　录

平面等周问题的简单解法①

Richard F. Demar

引言 等周问题,顾名思义,就是要在周长给定并满足某些条件的所有区域中,找出面积最大的区域. 解这类问题,通常是先证明如果解存在,则它必定具有某种形状,然后再去证明解必定存在. 在探讨等周问题的较早一些的著述中,都认为解的存在性是不言而喻的,并没有意识到这是一个必须加以考虑的问题. 因此,在默认了解必定存在之后,剩下的问题仅仅是讨论解所必须具有的形状. 试图用初等方法来研究这一问题,大致也只能如此. 本文就是报告一种初等方法,但它比过去使用过的大多数方法看来具有更广泛的用途. 如前所述,我们将始终假定解是存在的,而只是讨论解所必须具有的形状.

从古时候起,人们就考虑等周问题. 相传 Dido 女皇(凭直觉)解决过一个等周问题,并由此导致了迦太基城的建立([5],第882页). 根据Coolidge的考证,古希腊数学家Zenodorus 在公元前二世纪就研究过这类问题,他的研究成果在5 个世纪之后由 Pappus 详述并加以推广. 18 世纪时,Lagrange 创立了变分法,这对处理等周问题提供了最强有力的工具,尤

---

① A simple approach to isoperimetric problems in the plane, *Math. Magazine*, 48 (1975), 1—12.

其适用于这个问题的更一般性的提法. 但是,几何方法不仅在平面中,而且在别的某些场合也都能成功地使用,这一事实是由 19 世纪时的大几何学家 Jacob Steiner 证明的[6].

等周问题的一个直接的简化是下面的定理:

(*) 在具有周长 p 的所有区域中,如果 R 的面积最大,则 R 一定是凸的.

集合 S 被称为是凸的,如果对于 S 中的任意两点 A 和 B,直线段 AB 一定整个地被包含在 S 中. (*)的证明见[4]. 它的证明思路是很简单的,即,如果 R 不是凸的,则存在一个区域,其面积更大但周长比 R 的短(见图 1). 这条定理不断地被用于去简化遇到的各种问题,但是没有一种方法能自始至终



图 1

地被用于去解决这各种问题. 对于我们现有的大多数问题,几何方法是有奇效的. 本文的目的是说明,定理(*)不仅能用于简化问题,而且能用于解决许多问题. 一个非常简单的处理手法,但其威力远远超过人们的预料,这便是一例.

我们是这样将定理(*)用于解题的. 如果我们希望证明,满足某些给定条件且具有最大面积的区域具备某些性质,那末就去考虑那些满足这些给定条件但不具备这些性质的区域 R. 如果我们能构造出一个区域 R',它不是凸的但和 R 有相同

的面积和周长并满足那些给定条件，则 R 就不可能具有最大的面积，否则 R' 将是一个非凸的解①. 这一方法曾被 Adler（参见[1]）在很狭窄的形式中用于处理一个很特殊的问题，但并没有意识到它有着广泛的应用.

现在用一个非常简单的例子来解释这一方法，我们用它去证明在周长为 p 的所有平面区域中，具有最大面积的区域不是正方形. 如果 R 是周长为 p 的正方形 $ABCD$，则它的边长是 $p/4$. 选取 AB 上的点 E 及 BC 上的点 F，使 EF 的长度小于 $p/4$. 构造 $\triangle E'F'B' \cong \triangle EFB$，其中的 F' 和 E' 是边 DC 上的内点. 则多边形 $AEFCE'B'F'D$ 不是凸的，但它的面积和周长与 R 相同，因而在周长为 p 的所有区域中 R 不可能有最大的面积（图 2）.

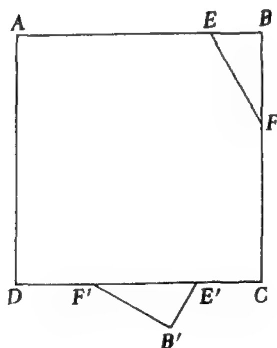


图 2

① 这实际上是一种特殊形式的反证法. ——译者注

为了证明这一方法的有用性，我们将用它及它的一些稍加变化的形式去解下面的 3 个问题：设 p 是给定的正数.

1. 设 n 是给定的正整数. 在周长等于 p 的所有 n 边形中，求出具有最大面积的一个.

2. 在具有周长 p 的所有平面区域中，求出具有最大面积的区域.

3. 给定一个周长大于 p 的三角形，在被包含在此三角形中的周长为 p 的所有区域中，求面积最大者.

这 3 个问题中的前 2 个是经典的，它们的解很早就知晓，第一个问题的解是正 n 边形，第 2 个问题的解是圆. 但我们这里给出的证明是新的. Alfred Garvin 教授提出了第 3 个问题，并猜测了这一问题的正确解，这是他根据物理实验得到的，作者在此表示感谢. Garvin 教授和我都曾认为这一问题是新的. 但是，当这一工作做完并且写完这篇文章之后，作者发现 Steiner 在 1842 年已经发表了这一问题及其解([6],p. 149). 在研究初等问题时有许多这种“撞车”现象. 但这儿给出的证明与 Steiner 的不一样，而且我们相信它是新的.

迄今为止，我们一直在用区域这个词，但并没有定义它. 所谓**区域**，我们指的是有界连通开集的闭包，它的边界是一条简单的闭可求长曲线[①]. 本文中用 $l(AB)$ 表示线段 AB 的长度，用 $m(\angle ABC)$ 表示角 ABC 的角度.

文中要用到一些大家熟知的凸集边界的性质. 设 R 是一个凸集，其边界为 γ，γ 是一条简单的闭连续曲线. 设 A 是 γ 上

---

① 这里及下文中，不熟悉这些数学术语的读者可以按自己原有的直观认识去理解文中的概念及结论，这对于理解本文不会产生影响. ——译者注

的一个点. 设想自己站在 A 点上且**面向**集合 R. 则从 A 出发绕 γ 行走有一个右手方向也有一个左手方向. 所谓在 A 点的右手方向切线,是指在 A 点与 γ 按右手方向相切的射线,类似地定义左手方向切线. 凸集边界的性质之一就是在它的每一点上,既有右手方向切线,也有左手方向切线[3]. 这两条射线的夹角,按包含在 R 中的那部分度量,称为 A 点的内角. 因为 R 是凸的,所以每一点上的内角最多是 180°. 设 S 是任意一块区域,它的边界在每一点上既有右手方向切线又有左手方向切线. 如果其边界上有一点的内角大于 180°,则 S 一定不是凸的. 如果边界上每一点的内角都等于 180°,则称 γ 有切线. 凸集边界的另一条性质是,它包含一个稠密点集,其中的每一点上都有切线. γ 的子集 β 称为是**稠密**的,如果 γ 的任意两点之间有无数个 β 的点.

第 1 个问题的解 在周长等于 p 的所有 n 边形中,正 n 边形的面积最大.

证明 我们先证明解必定是等边的,然后证明它必定是等角的. 设 $P_n=A_1A_2\cdots A_n$ 是一个不等边的 n 边形. 则 P_n 至少有两条相邻边的长度不相等. 不失一般性,假定 $l(A_1A_2)>l(A_2A_3)$(见图 3). 在 A_1A_2 上选取点 C 使 $l(A_2A_3)<l(A_2C)<l(A_2A_1)$,连接 A_3C. 则 $m(\angle A_2A_3C)>m(\angle A_2CA_3)$. 依 A_3C 的垂直平分线反射 $\triangle A_2A_3C$. 并设 A_2' 是 A_2 在此反射下的像,从而 $\triangle A_2'A_3C$ 是 $\triangle A_2CA_3$ 的像. 因为

$$m(\angle A_2'CA_3) = m(\angle A_2A_3C) > m(\angle A_2CA_3)$$

及

$$m(\angle A_2CA_3) + m(\angle A_1CA_3) = 180°,$$

所以

$$m(\angle A_2'CA_3) + m(\angle A_1CA_3) > 180°.$$

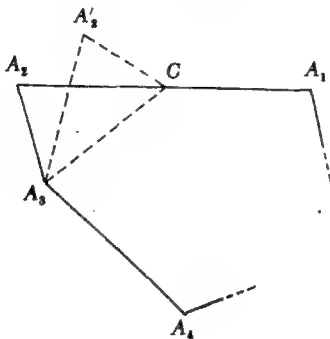


图 3

因此，多边形 $P' = A_1CA_2'A_3\cdots A_n$ 不是凸的. 又因为$\triangle A_2A_3C \cong \triangle A_2'CA_3$，所以多边形 P' 与 P 有相同的周长和面积. 然而 P' 有 $n+1$ 条边. 为了证明 P_n 不可能是问题的解，我们连接 A_1A_2'. 所得多边形 $A_1A_2'A_3\cdots A_n$ 是 n 边形，其周长小于 P' 的周长从而也小于 P_n 的周长，但它的面积却大于 P'，从而也大于 P_n 的面积. 因此 P_n 不可能是问题的解. 解必定是等边多边形.

具有最大面积的多边形必定是等角的结论也可以类似地推得. 设 $P_n = A_1A_2\cdots A_n$ 是一个不等角的 n 边形；比如说 $m(\angle A_nA_1A_2) > m(\angle A_2)$（见图 4）. 则存在数 α 使 $0 < \alpha < \frac{1}{2}[m(\angle A_nA_1A_2) - m(\angle A_2)]$. 在 A_2A_3 上选取点 D 使 $m(\angle A_2A_1D) = \alpha$. 则有

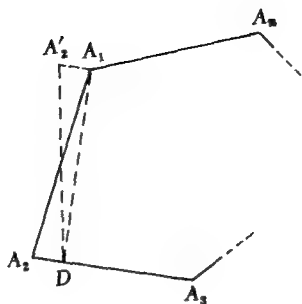


图 4

$$
\begin{aligned}
m(\angle A_3DA_1) &= m(\angle A_2) + m(\angle A_2A_1D) \\
&= m(\angle A_2) + \alpha < m(\angle A_2) \\
&\quad + \frac{1}{2}[m(\angle A_nA_1A_2) - m(\angle A_2)] \\
&= \frac{1}{2}[m(\angle A_nA_1A_2) + m(\angle A_2)] \\
&= m(\angle A_nA_1A_2) - \frac{1}{2}[m(\angle A_nA_1A_2) - m(\angle A_2)] \\
&< m(\angle A_nA_1A_2) - m(\angle A_2A_1D) \\
&= m(\angle A_nA_1D).
\end{aligned}
$$

依 A_1D 的垂直平分线反射$\triangle A_2A_1D$. 设 A_2' 是 A_2 的像. 则 $m(\angle A_2'A_1D)=m(\angle A_2DA_1)$；于是

$$
\begin{aligned}
& m(\angle A_nA_1D) + m(\angle A_2'A_1D) \\
&\quad = m(\angle A_nA_1D) + m(\angle A_2DA_1) \\
&\quad > m(\angle A_3DA_1) + m(\angle A_2DA_1) \\
&\quad = 180°.
\end{aligned}
$$

因此多边形 $P' = A_1A_2'DA_3\cdots A_n$ 不是凸的. 但是由于 $\triangle A_2A_1D \cong$

$\triangle A_2'A_1D$，所以多边形 P_n 和 P 有相同的周长和面积. 但是 P' 又有 $n+1$ 条边. 所以我们连接 A_nA_2'，得多边形 $P''=A_2'DA_3\cdots A_n$ 有 n 条边，其面积比 P' 大但周长比 P' 小，从而面积比 P_n 大但周长比 P_n 小. 因此，P_n 不可能是问题的解. 从而，一个 n 边形是问题的解的话，它必定也是等角的. 证毕.

第 2 个问题的解　在具有周长 p 的所有平面区域中，圆的面积最大.

证明　设 R 是周长为 p 的所有区域中具有最大面积的区域. γ 是 R 的边界. 因为 R 必定是凸的，所以存在 γ 的一个稠密点集，在其每一点上 γ 都有切线. 设 A 和 B 是此稠密集中的任意两点，并使得在 A 点的切线和在 B 点的切线不平行[①]. 两条切线的交点记为 C(见图 5). 我们说一定有

$$m(\angle CAB)=m(\angle CBA).$$

如果这不成立，不妨设 $m(\angle CAB)>m(\angle CBA)$. 记 $\overset{\frown}{AB}$ 为 γ 在 $\triangle ABC$ 内部的部分. 依 AB 的垂直平分线反射 $\triangle ABC$ 及 $\overset{\frown}{AB}$. 设 C' 是 C 在该反射下的像. 则 $\triangle ABC'$ 是 $\triangle BAC$ 在此反射下的像. 在 γ 上代替 $\overset{\frown}{AB}$ 以它在此反射下的像，所得曲线记为 γ'. 又设 R' 是以 γ' 为边界的区域. 因为反射保持面积和长度不变，所以 R 和 R' 有相同的面积和周长. 又因为

$$m(\angle CBA)+m(\angle ABD)=180°.$$

及

① 请读者考虑为什么一定存在这样的两点. —译者注

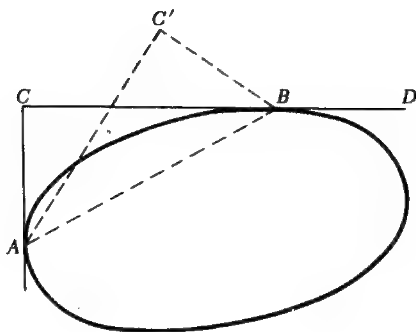


图 5

$$m(\angle C'BA) = m(\angle CAB) > m(\angle CBA),$$

所以

$$m(\angle C'BA) + m(\measuredangle ABD) > 180°.$$

但是 BD 和 BC' 分别是 γ' 在 B 点的左手方向切线及右手方向切线,因此 R' 不是凸的.这和 R 在所有周长为 p 的区域中面积最大这一事实相矛盾.因而 $m(\angle CAB) > m(\angle CBA)$ 的假设是错的.即

$$m(\angle CAB) = m(\angle CBA).$$

如果我们分别作 γ 在 A 点及 B 点的切线的垂线,并记这两条垂线的交点为 F,则角 FAB 和角 FBA 分别是两个相等角的余角,从而也相等,于是有 $l(FA) = l(FB)$.现在我们在 γ 上选取第 3 点 E,使 γ 在 E 点处有切线,并作出该切线的垂线,记垂线与 AF 及 BF 的交点分别为 G 和 H,并连接 EA 和 EB,则得到等腰三角形 EAG 和 EBH(见图 6).因为

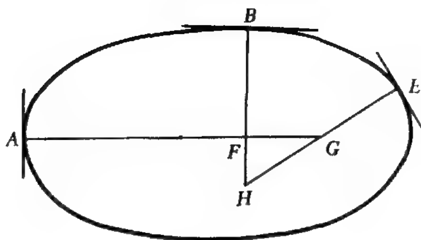


图 6

$$l(AF)+l(FG)=l(AG),$$

所以由替换得

$$l(BF)+l(FG)=l(EG).$$

另外还有，

$$l(BF)+l(FH)=l(EG)+l(GH).$$

由第 2 个等式减去第 1 个等式得

$$l(FH)-l(FG)=l(GH).$$

或者

$$l(FH)=l(FG)+l(GH).$$

因此$\triangle FGH$ 是退化的三角形，又因为 AG，BH 和 EH 是 3 条不同的直线，所以这意味着 $F=G=H$. 记这公共点为 G. 这样，点 A，B 及 E 离开 G 的距离都相等. 因为 A，B，E 是任意的，所以 γ 上使 γ 有切线的任意一点离开 G 的距离都等于$l(AG)$. 因为 γ 是一条连续曲线，所以这就意味着，对于 γ 上的任意一点 X，都有 $l(XG)=l(AG)$. 也就是说，γ 是一个圆.

注 这个证明和现有的某些性质相比，优点在于它只依赖于 γ 的局部性质而不是整体性质. 它实质上是证明了 γ 的每一点的曲率都相等. 因此它所证明的东西超过了定理的结

论.

考虑这样一类等周问题，其中，区域边界的一部分被限制为某种形状，而其余部分是自由的，问何种形状的区域面积最大？由前面的证明可知，如果区域具有最大的面积，则其边界的每一个自由部分都应是圆弧. 例如，给定线段 AB，考虑以 AB 为一部分边界且周长等于给定数 $p(p>2l(AB))$ 的所有区域，从中找出面积最大的区域 R，则 R 的边界一定是由 AB 及圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 组成，其中 $\overset{\frown}{AB}$ 的长度等于 $p-l(AB)$.

在给出第 3 个问题的解之前，让我们先排除已被考虑过的这一问题的一些特殊情形. 给出一个三角形区域 T 及数 p，p 小于 T 的周长，我们要在包含在 T 中且周长为 p 的所有区域中找出面积最大的区域 R. 设 T 的内接圆的周长为 c，如果 $p\leqslant c$，则问题 3 与我们已经解出的问题 2 是一样的. 因此在问题 3 中，我们假定 $p>c$.

第 3 个问题的解 设 T 是给定的三角形区域，周长为 P，内接圆的周长等于 c. 设 p 是一个定数，$c<p<P$. 则在所有包含在 T 中且周长为 p 的区域中，具有最大面积的区域 R 的边界 γ 由 3 条圆弧及连接这些圆弧的端点的 3 条在 T 的边上的线段组成，其中 3 条圆弧的半径都相等，而且每一条圆弧都与 T 的两条相邻的边相切(见图 7).

证明 设 R 是问题的解，γ 是其边界. 则由上一个问题解后的注知道，γ 的任意一部分，如果不在 T 的边界上，则必定是圆弧. 因为 $p<P$，所以 R 的边界不可能与 T 的边界完全重合；从而 γ 至少包含一条圆弧.

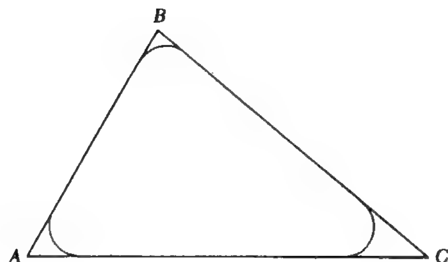


图 7

我们首先证明 T 的所有顶点都不在 γ 上. 设 T 是$\triangle ABC$，并假定顶点 C 在 γ 上. 因为 R 是凸的，所以如果 3 个顶点 A,B 及 C 都在 γ 上，则 γ 必定和 T 的边界重合，我们已经说过，这是不可能的. 因此至少有一个顶点，譬如说 B，不在 γ 上. 则存在圆弧 β，其端点 K 及 M 分别在$\triangle ABC$ 的两条边上，不妨设

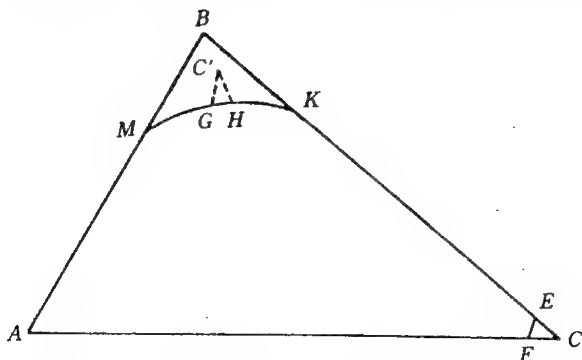


图 8

在 BC 及 AB 上(见图 8). 在 BC 上选取点 E，在 AC 上选取点 F，使它们“紧靠”着 C. “紧靠”这个词的意义我们以后详细说明.

构造圆弧连接 E 和 F,此圆弧的半径与 β 的半径相同,圆心位于 EF 的不包含 C 的一侧. 现在在 β 上选取 G 和 H,它们都不是 β 的端点,使得 $\overset{\frown}{GH} \cong \overset{\frown}{EF}$. 设 C' 是不在 R 上的点并使得 $l(C'G)=l(CE)$ 且 $l(C'H)=l(CF)$. 这里,有一点必须得到保证,即 C' 一定要在 T 的内部,只要 E 及 F 充分接近 C,这总是可以做到的,这也就是我们前面所说的"紧靠"的含意. 总起来说,点 E 及 F 要选取得使下列条件都成立:

(1) E 在 KC 上,

(2) $l(\overset{\frown}{EF})<l(\overset{\frown}{MK})$,

(3) $\overset{\frown}{EF}$与 BC 不相切,

(4) C' 在 T 的内部.

我们假定这些条件都能满足.

在 γ 上,用$\overset{\frown}{EF}$代替 $FC\cup CE$,用 $HC'\cup C'G$ 代替$\overset{\frown}{HG}$,所得曲线记为 γ'. 设 R' 是由 γ' 构成边界的区域. 因为以 $HC'\cup C'G\cup GH$ 为边界的图形与以 $FC\cup CE\cup\overset{\frown}{EF}$为边界的图形是全等的,所以 R 和 R' 具有相同的面积及周长. 但因为 EC 不是$\overset{\frown}{EF}$的切线,所以 $C'G$ 不是$\overset{\frown}{GH}$的切线,从而它也不是 β 的切线. 于是 γ' 在 G 的内角大于 $180°$,这说明 R' 不是凸的,与 R 是问题的解相矛盾. 从而证明了 T 的任意一个顶点都不在 γ 上.

其次我们证明包含在 γ 中的圆弧都有相同的半径. 如不然,设 γ 包含 2 条半径不相等的弧 β_1 和 β_2,设 β_1 的半径是 r_1,β_2 的半径是 r_2,$r_1<r_2$(见图 9). 在 β_1 上选取点 D 和 E,在 β_2 上选取点 F 和 G,使得弦 DE 和 FG 满足等式 $l(DE)=l(FG)$. 构造半径为 r_1 的弧 σ_1 连接 F 和 G,半径为 r_2 的弧 σ_2 连接 D 和 E,由点 D,E,F 和 G 的适当选取,我们总能使 σ_1 及 σ_2 都在 T

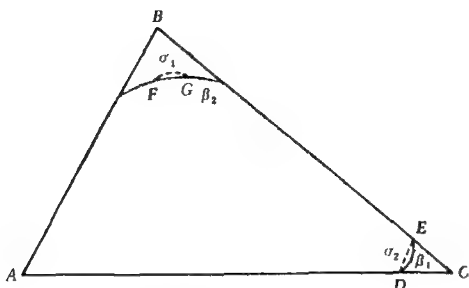


图 9

中.在 γ 中用 σ_1 替换包含在 β_2 中的 $\overset{\frown}{FG}$,用 σ_2 替换包含在 β_1 中的 $\overset{\frown}{DE}$,所得曲线记为 γ'.设 R' 是以 γ' 为边界的区域,则 R 和 R' 有相等的面积和周长.但是 γ' 在 F 点的内角大于 180°(在 G 点的内角同样),所以 R' 不是凸的.这又和 R 是问题的解相矛盾.从而,包含在 γ 中的每一条圆弧都有相等的半径.

最后,我们证明,包含在 γ 中的每一条圆弧都与它们相交的 T 的每一条边相切.同样我们设 R 是问题的解,γ 是其边界.设 β 是包含在 γ 中的一条圆弧,它和 T 的一条边 AB 交于点 X,并假定 β 与 AB 在 X 点不相切(见图 10).在 β 上取一点 D(充分接近于 X),并通过 D 点作 β 的切线 EY 交 AB 于 E.因为 β 与 AB 在 X 点不相切,所以 $l(EX)<l(ED)$.在 EA 上选取点 G 使得 $l(EX)<l(EG)<l(ED)$.则在$\triangle EDG$ 中,$m(\angle EGD)>m(\angle EDG)$.如果我们沿着 β 从 D 移动到 X,然后再沿着 γ 继续移动,则有两种可能的情形:如果线段 XG 是边界 γ 的一部分,则我们沿着 XG 移动;否则我们到达 XG 上的某一点,它是 γ 中另一条圆弧的端点.但无论哪一种情形,γ 和 DG 都相交于一个不是 D 的点,记这个交点为 H(H 可能就是 G,也可能不

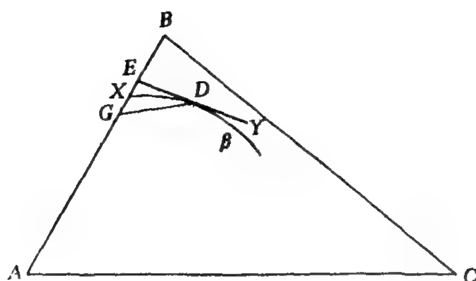


图 10

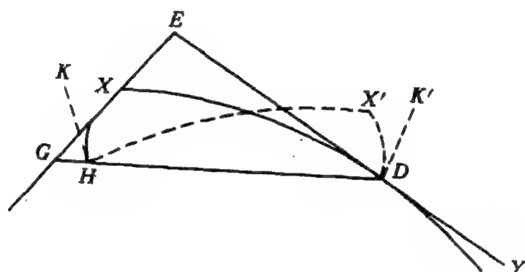


图 11

是，见图 11）. 设 HK 是 γ 在 H 点的左手方向切线. 则 $m(\angle DHK)\geqslant m(\angle DGE)>m(\angle EDG)$. 依 HD 的垂直平分线，反射 $(DH)_\gamma$，即 γ 在 $\triangle EDG$ 内部及边界上的部分以及 γ 在 H 点的左手方向切线 HK. 设 K' 表示 K 的像. 在 γ 中用 $(DH)_\gamma$ 在此反

射下的像代替$(DH)_\gamma$，所得曲线记为γ'，以γ'为边界的区域记为R'[①]. 因为反射保持距离不变，所以R和R'的面积和周长都相等. 又因为DK'是γ'在D点的右手方向切线；DY是γ'在D点的左手方向切线；

$$m(\angle K'DG) = m(\angle KHD) > m(\angle EDH);$$

$$m(\angle EDH) + m(\angle HDY) = 180°,$$

所以

$$m(\angle K'DH) + m(\angle HDY) > 180°.$$

于是γ'在D点的内角大于180°，从而R'不是凸的. 但是这与R是问题的解的假定相矛盾. 因此β与AB在X点相切. 结论是：包含在γ中的每一条圆弧和与其相交的T的每一条边相切.

至此，我们已经清楚地证明了，除了以下2点外，问题的解R的边界γ必定满足所说的所有条件：(1) γ和T的每一条边相交的部分是直线段；(2) 包含在γ中的圆弧恰好是3条. 现在我们来说明，从已经证得的结论可以推得这2点性质. 因为R是凸的，所以γ和T的边相交的部分必定或者是空集，或者只是一个点，或者是一条直线段. 假设γ和T的某一条边，设为AB，相交是空集或者只是一个点. 因为A和B不在γ上，又因为包含在γ中的圆弧与同它们相交的T的边相切，所以一定存在包含在γ中的一条圆弧β，与AC及BC相切，β的圆心与点A及B不在β的同一侧，并使得β与AB边不相交或者相切. 因为C不在γ上，所以存在γ的另一条圆弧ω与AC

---

① 因D取得充分接近x，所以一定可使R'被包含在三角形中. ——译者注

和 BC 相切，其圆心与 C 不在 ω 的同一侧[①]. 由于这两条(不同的——译者注)弧 β 及 ω 必定有相等的半径且都和 AC 及 BC 相切，所以它们的切点相同，因此 $\beta\cup\omega$ 是一个圆. 然而这个圆的周长至多是 c，这与 γ 的长度是 $p>c$ 相矛盾. 这就证明了，γ 和 T 的每一条边相交的部分一定是直线段. 又因为 T 的 3 个顶点都不在 γ 上，所以 γ 恰好包含了 3 条圆弧. 证毕.

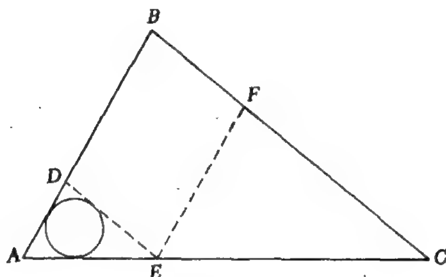


图 12

注 1 指出下面这一性质也许是很有意义的，即包含在 γ 中的 T 上的 3 条线段的长度之比是 $l(AB):l(BC):l(CA)$. 如果我们以包含在 γ 中的圆弧的相同半径，作出与 AB 及 AC 相切的圆 β，并作 β 的平行于 BC 的切线 DE，再作 EF 平行于 AB，则由 AD，DE 及 EA 和 β 相切的点确定的 β 的 3 条圆弧与包含在 γ 中的 3 条圆弧相等，而且线段 EF，FC 及 CE 分别与 AB，BC 及 CA 上包含在 γ 中的线段相等(见图 12). 解 R 的面积正好

---

① 请读者自己证明，圆弧 β 及 ω 必定存在且不相同. ——译者注

等于圆 β,平行四边形 $DEFB$ 及△EFC 的面积之和.

注 2 如果问题 3 中的三角形 T 用任意一个凸多边形代替,则显而易见的是,除了 γ 与多边形的给定边的相交部分可能只是一个点或空集以外,有关 γ 的其余性质的证明在这里依然成立. 因此,γ 一定是由几段相同半径的圆弧及包含在给定多边形的边上的线段一起组成的,其中的每一条圆弧相切于与之相交的每一条边.

参 考 文 献

[1] C. F. Adler, An isoperimetric problem with an inequality, *Amer. Math. Monthly*, **52**(1945) 59—69.

[2] J. L. Coolidge, A History of Geometrical Methods, Oxford University Press, Oxford, 1940.

[3] M. A. Krasnoselskii and Ya. B. Rutickii, Convex Functions and Orlicz Spaces, Noordhoff Ltd., Groningen, Netherlands, 1961.

[4] L. A. Lyusternik, Convex Figures and Polyhedra, Dover, New York, 1963.

[5] J. R. Newman, ed., The World of Mathematics, vol. 2, Simon and Schuster, New York, 1956.

[6] J. Steiner, Sur le maximum et le minimum des figures dans le plan, sur la sphère, et dans l'espace en général, I and II, *J. Reine Angew. Math.* (Crelle), **24**(1842) 93—152 and 189—250.

(朱学贤译, 潘承彪校)

关于“平面等周问题的简单解法”的注记

ALFRED D. GARVIN

DeMar 在其“…等周问题…”的论文(指本书第一篇文章)中,特别介绍了下面的问题及其解:

问题 给定一个三角形 T,其周长为 P,内切圆周长为 c,设有一数为 p,$c<p<P$,在 T 内的所有周长为 p 的区域之中,找出面积最大的区域 R.

结论 具有最大面积的区域 R 的边界是由每一条都与 T 的两邻边相切的三条圆弧以及 T 的边界上夹在这些圆弧的顶点之间的三条线段组成.并且这三条圆弧具有相同的半径(见图 1).

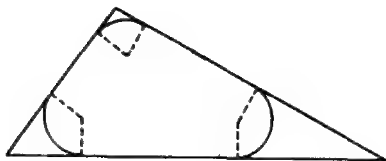


图 1

在给出这个结论的证明之前,DeMar 教授对我表示由衷的感谢,为了我提出了这个问题以及正确地猜测到它的解答——这是我通过物理实验得到的.也许读者有兴趣了解是什么样的物理实验使得我推测出这种结论的.

第一个实验的理论根据是,三角形容器里的水平液体表

面，具有很大的表面张力，使其呈现等周的最佳形状. 把三块玻璃片放在水平放置的玻璃板上构成一个具有平底的直立的小三角形容器. 将液态的水银慢慢注入其内可以预料，水银将先构成一个小圆点，渐渐扩大，直到成为与三角形内切的圆为止. 当继续注入水银时，这个圆面将在三个切点处沿这个容器的边渐渐平展，同时半径逐渐缩小，三个圆弧将逐渐靠近三角形的顶点. 仔细观察这些圆弧的形状，并用彩笔描下这个水银面的形成过程中的许多中间图形.

第二个实验基于与第一个实验相同的理论根据. 然而，在这个实验中却是先在三角形容器里注入一部分水，然后将一种粘度适宜的油慢慢注入水中，这时将会发生与第一个实验所描绘的相同的观察结果，看到同样的图形现象.

第三个实验的理论根据是对三角形容器里的由一种可塑带所范围的区域内部施加水平压力，能呈现出一个等周的最佳形状. 用木材作一个类似于不对称的台球台的三角形围栏，按照 DeMar 的说法，把长为 $p(c<p<P)$ 宽为半英寸的硬纸带两端钉在一起，形成一个闭圈，并把它在上述三角形围栏里舒展开，把数以百计的小滚球倒入由可塑带所包围的空间里，并施加压力，直到盛满为止. 这时，可塑的围栏沿坚硬的三角形围栏边沿伸展，同时以三个一样的圆弧形状向三角形的内角方向鼓起，仔细观察，并描绘出这些圆弧.

所有这三个实验的结果都表明，所形成的弧基本是圆形的，反复的实验进一步证明了这一现象. 在前面两个表面张力实验中，弯月面效应（用水银时是凸的，用油时是凹的）使得这些弧的端点变形. 事实上，第三个内压实验表明这些弧的端点就是圆弧和三角形边界的切点.

根据在任何一种由这些物理实验所形成的区域中的这三个圆弧之间的关系，可以对它们提出这样三种假设：

1. 它们有相同的半径.

2. 它们有相同的弦.

3. 它们有相同的弧长.

我们根据这三条假设中的任何一条，就可以得到周长为 $p(c<p<P)$ 的相应的那种区域的面积的求积公式. 一些具体计算表明，对任何给定的三角形区域 T 及 p，根据第一条假设所得到的区域的面积最大. 当然应排除 T 是等边三角形情况，这时从三个假设出发都得出同样的面积.

正是本作者——显然不是一位数学家——猜出了问题的解答，而后来由 DeMar 所证明.

结 束 语

这里所讨论的问题仅是我所关心的更广的问题的一部分. 利用 DeMar 的说法，这个更广的问题就是：

问题： 给定一个三角形区域 T，其周长为 P，内切圆周长为 c. 在包含于 T 内的所有区域中，求区域 R，使得其面积与周长的比最大.

很容易确定，这样的一个区域的周长 p 必须小于 P 而大于 c. 解决这个问题的下一步是确定这个区域的一般形状. 通过以上的讨论，给出了我一开始所提出的问题的解答. 假定这个解答是对的，我用同样有点不自然的方法立刻解决了这个更广的问题. 这个问题的推广解决了[①]. 从而这也提出了一个

① 这里是指用物理实验的方法来解决. ——译者注

在数学上有意义的猜想.

从以下这一点上来说,我具有很好的判断力:我求助于 DeMar 教授来证实我的猜想(如果他证明了这些猜想的话);以及我提供了严格数学证明的背景.事情正是这样,DeMar 教授证明了所有这些猜想.我们一起合作把这一系列的猜想进行整理,写出了具有相当价值的论文.

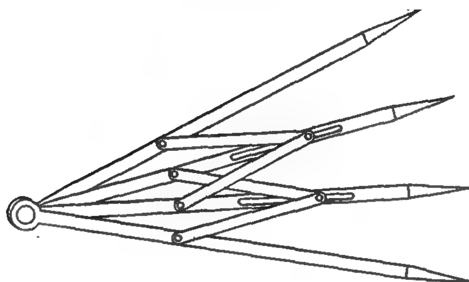
极其不幸的是,在那篇文章发表后不久,F. DeMar 教授就去世了.据说,那篇文章是他的富有创造力的学者生涯中的最后工作.由于 DeMar 教授的去世,使得作者关于更广的问题的工作的发表推迟到他得到另一位同样慷慨的学者的帮助.

(李 伟译,潘承彪校)

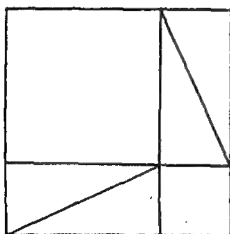
两篇无字的数学文章①

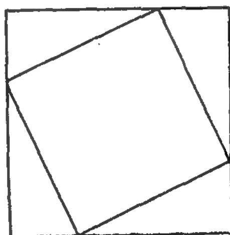
R. Isaacs

1. 三等分一个角



2. Pythagoras 定理②的证明





① Two mathematical papers without words, *Math. Magazine*, 48(1975), p. 198.

② Pythagoras 定理是指勾股定理. ——译者注

拙中见巧[①]

M. Stojaković

考虑线性方程组

$$AX = B, \tag{1}$$

其中 A 是一个 $n\times n$ 矩阵，$X=[x_1,\cdots,x_n]^T$，$B=[b_1,\cdots,b_n]^T$. 有人问："为什么不直接在(1)式的两边取行列式而得到 X 的解呢(如果解存在的话)?"这个问题初看起来十分愚蠢，其实不然.

为简便起见，考虑 $n=3$ 的情形，则(1)式为

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

(2)式也可写成

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 0 \\ b_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

因为

---

① A trick with redundant information, *The Amer. Math. Monthly*, 87(1980), p. 131.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{bmatrix}, \cdot$$

所以利用矩阵加法得

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b & c \\ b_2 & e & f \\ b_3 & h & i \end{bmatrix}. \tag{4}$$

现在在(4)式两边取行列式得

$$(\det A)x_1 = \det A_1,$$

其中A_1的意义很明显,这就是求x_1的 Crame 法则.

(朱学贤译,潘承彪校)

夫妇入座问题的无性别主义者的解法①

K. P. Bogart

1. 夫妇入座问题

所谓夫妇入座问题是问 n 对夫妇围圆桌而坐，共有多少种不同的入座法，这里要求入座时男女必须相间且同一对夫妇不能相邻. 以 M_n 记此不同入座法的种数.

这个著名问题最初由 Lucas[8]于 1891 年提出. 更早一点，Tait[12]曾提出过一个与之等价的问题，这是因为他在纽结理论方面的工作而引起的(见 Kaplansky 和 Riordan[6]). 许多作者讨论过这个问题(见[6]中参考文献)，并找到了多种解法. 大部分解法只是给出计算 M_n 的递推关系或生成函数，而不是给出明显表达式. 1934 年 Touchard[13]发表了 M_n 的第一个明显表达式，但未予证明. 后来 Kaplansky[5]于 1943 年给出了 Touchard 公式的证明. Kaplansky 的推导是简单的但不很直接，因此人们一般还认为夫妇入座问题是一个困难问题. ②

本文将对 Touchard 公式给出一个完全直接的推导. 类似于 Kaplansky 的解法，我们的解法也基于容斥原理(参见 Ryser

---

① Non-sexist solution of the ménage problem, *The Amer. Math. Monthly*, 93 (1986), 514—518.

② 可参看柯召，魏万迪：组合论，上册. p. 89—92. ——译者注

[11]和 Riordan[9]). 所不同的是,我们的解法并不假定 n 位女士(或 n 位男士)首先入座.

2. 弱夫妇入座问题的解

首先考虑一个较简单的问题,即在夫妇入座问题中放弃男女相间而坐的要求,并称之为弱夫妇入座问题. 该问题是问 n 对夫妇围圆桌而坐,同一对夫妇不相邻,共有多少种不同的入座法. 以 M_n 记此不同入座法的种数.

假设从某一座位开始,已将圆桌上座位按顺时针方向编了号. 如果不考虑同一对夫妇是否相邻,那么这 $2n$ 个人围圆桌而坐的不同入座法共$(2n)!$种,以 S 记这些不同入座法的集合. 为了确定 M_n,我们需要对相邻而坐的夫妇的集合应用容斥原理. 以 ω_k 记某特定的 k 对夫妇相邻而坐的不同入座法种数(此时别的夫妇也可能相邻而坐). 显然,ω_k 并不依赖于 k 对夫妇的特定选取法,所以由客斥原理可得

$$m_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \cdot \binom{n}{k} \cdot \omega_k.$$

现在需要计算 ω_k. 设 $n>1$. 假如我们有 k 个无标记的骨牌,并且有 $2n$ 个点均匀地分布在一个圆周上,使得骨牌的大小刚够盖上相邻两点. 以 d_k 记这 k 个骨牌互不重叠地安放在该圆周上使每个骨牌恰盖住两点的不同放法的种数(见图1). 考虑到 k 对夫妇在 k 个骨牌所确定的座位入座共有 $k!$ 种不同方式,而每对夫妇的具体坐法有两种,故特定的 k 对夫妇在这 $2k$ 个座位入座的方式共有 $k!\cdot 2^k$ 种. 余下的 $2n-2k$ 个人共有$(2n-2k)!$ 种入座方式,故有

$$\omega_k = d_k \cdot k! \cdot 2^k \cdot (2n-2k)!.$$

现在仅需计算 d_k. 这是一个典型的组合问题,已有现成答案,

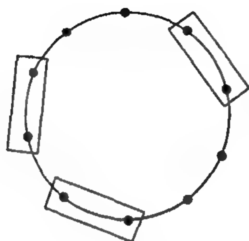


图 1　不重叠的骨牌放法

即

$$d_k = \frac{2n}{2n-k} \cdot \binom{2n-k}{k}$$

(详见 Ryser[11]). (译注:借助图 1 我们也可直接写出 d_k 的表达式. 为此不妨把一个骨牌也看作一个"点",于是图 1 可看作 $2n-k$ 个点的圆周上有 k 个作为骨牌的"点". 如果从某一点开始按顺时针方向将这 $2n-k$ 个点编号,因该起点的取法有 $2n-k$ 种,故带有两种编号的图 1 中骨牌的放法数为

$$(2n-k) \cdot d_k.$$

我们也可用另一方式来计算这个数. 首先在编了号的 $2n-k$ 个圆周上的点中取出 k 个点作为骨牌,取法数为 $\binom{2n-k}{k}$. 然后将骨牌对应于圆周上相邻两点,于是得到圆周上的 $2n$ 个点. 将这 $2n$ 个点依顺时针方向编号,从而骨牌放法数也为

$$2n \cdot \binom{2n-k}{k}.$$

由此即得 d_k 的表达式.)将 d_k 代入 ω_k 的公式则有

$$\omega_k = 2n \cdot (2n - k - 1)! \cdot 2^k.$$

再将 ω_k 代入 m_n 的公式,可得

$$m_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} \cdot 2n \cdot (2n - k - 1)! \cdot 2^k.$$

由对称性可知,m_n 一定被 $2^n \cdot n!$ 除得尽. 提出此因子,我们得到

$$m_n = 2^n \cdot n! \cdot \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{2n}{2n-k} \cdot \binom{2n-k}{k} \cdot (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-2k-1)).$$

表 1 列出了 m_n 的前几个值.

表 1　弱 ménage 数

n	m_n	$m_n/(2^n n!)$	$m_n/(2^n)!$
2	8	1	0.333333…
3	192	4	0.266666…
4	11904	31	0.295238…
5	1125120	293	0.310052…
6	153262080	3326	0.319961…
7	28507207680	44189	0.326998…
8	6951513784320	673471	0.332246…
9	2153151603671040	11588884	0.336305…
10	826060810479206400	222304897	0.339537…

3. ménage 问题的解

对于 ménage 问题，我们也象上一节一样进行，只是入座方式需加上男女相间的要求. 如果不考虑同一对夫妇是否相邻，那么入座法种数为 $2(n!)^2$ 种. 这是因为有两种方式决定哪些座位坐男士，哪些坐女士；并且有 $n!$ 种方式让男士入座男士的座位，也有 $n!$ 种方式让女士入座女士的座位. 与前面一样我们有(请读者自己证明——译者)

$$M_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} \cdot W_k,$$

其中 W_k 表示在男女相间的要求下，有某 k 对夫妇相邻而坐的入座法种数. 并且我们有

$$W_k = 2 \cdot d_k \cdot k! \cdot (n-k)!^2.$$

这里因子 2 来自选取男士(或女士)座位的两种方式. 因子 $k!$ 的理由同前. 对余下的 $n-k$ 对夫妇，$n-k$ 位男士及 $n-k$ 位女士入座的方式数各为 $(n-k)!$，这决定了最后一个因子 $(n-k)!^2$. 将 d_k 代入得

$$W_k = 2 \cdot 2n \cdot (2n-k-1)! \cdot \frac{(n-k)!^2}{(2n-2k)!}.$$

在上面 M_n 的公式中代入 W_k，我们有

$$M_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} \cdot 2 \cdot 2n \cdot (2n-k-1)! \cdot \frac{(n-k)!^2}{(2n-2k)!}.$$

由对称性可知，M_n 一定除得尽 $2 \cdot n!$. 提出此因子，我们得到

$$M_n = 2 \cdot n! \cdot \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{2n}{2n-k} \cdot \binom{2n-k}{k} \cdot (n-k)!.$$

表 2 列出了 M_n 的前几个值.

表 2　Ménage 数

n	M_n	$M_n/(2n!)$	$M_n/(2n!^2)$
2	0	0	0.0
3	12	1	0.166666…
4	96	2	0.083333…
5	3120	13	0.108333…
6	115200	80	0.111111…
7	5836320	579	0.114880…
8	382072320	4738	0.117509…
9	31488549120	43287	0.119562…
10	3191834419200	439792	0.121194…

4. 与 Kaplansky 的解法相比较

我们刚才给出的解法是完全直接及初等的. 但开始时我们曾说过,夫妇入座问题一般仍被认为是一个棘手的问题,原因何在呢?这可以用一句话来回答:是因为“女士优先”(Ladies first). 如果在考虑这一问题时没有想到让女士们(或者在罕见的情形,让男士们)先入座,则困难显然永远不会出现. 因此 Kaplansky 和 Riordan 说过:“我们可以从固定丈夫们或妻子们的位置开始,比如说,为礼貌起见先固定妻子们的位置.”

由于要让女士们先入座,夫妇入座问题就转化为限制位

置的排列问题. 遗憾的是，这一新问题比我们原先处理的问题要困难得多，这可以由 Kaplansky 解法的机敏性来判断[5]：

> 我们现在按通常的方式来重新叙述夫妇入座问题，注意到它的答案是 $2n!u_n$，其中 u_n 是 $1,2,\cdots,n$ 的不满足下列 $2n$ 个条件中的任意一个的所有排列数：1 在第 1 或第 2 位，2 在第 2 或第 3 位，…，n 在第 n 位或第 1 位. 从上面的 $2n$ 个条件中挑出 k 个，问有多少个 $1,\cdots,n$ 的排列能满足这所有 k 个条件？回答是 $(n-k)!$ 个或者 0 个，视这 k 个条件相容与否而定. 如果再用 v_k 表示从 $2n$ 个条件中选取 k 个相容条件的方法数，则由大家熟悉的容斥原理，我们得到
>
> $$u_n = \sum(-1)^k v_k(n-k)!.$$
>
> 最后只剩下计算 v_k，为此我们注意到：当把这 $2n$ 个条件依次排成一个圆形时，只有那些相邻的条件才是不相容的….

当然，$v_k=d_k$，所以我们看到了，Kaplansky 是如何由于把约束条件看作为排列在一个圆上，从而又回到了直接求解的轨道. 我们只能赞赏 Kaplansky 在重新发现这个圆中所表现出来的聪慧，但对使这种聪慧成为必要的这种传统——“女士优先”——表示遗憾.

5. 结论

我们已经看到，仅仅是由于女士优先入座的传统才使得夫妇入座问题从任何一个角度看来都是十分困难的. 我们揣测，如果不是因为这一传统作怪，或许不必经历了半个世纪之后才发现 M_n 的 Touchard 公式. 在性别问题对数学的发展起阻碍作用的所有情形中，这看来是最为奇特的例子了（见习题

2).

6. 习题①

我们在这里提出几个问题作为习题，读者可以借助于文后列出的文献进行研究.

(1) 说明如何简单地“推导出”d_k 的公式，写出答案，但不要利用递推关系、生成函数或者你所知道的别的什么(提示：首先对 W_k 做(即文章中的译者注)).

(2) 使得夫妇入座问题变得困难的真是性别问题吗?(见 Kaplansky 和 Riordan[6]及他们文中列出的参考文献.)

(3) 试解由图 2 所示的夫妇入座问题的一个类似问题(任何人不允许挨着或面对其配偶入座).



图 2 现实生活中的夫妇入座问题

(4) 弱夫妇入座问题可以进一步推广如下：给出具有相同顶点数的两个图形 G_1 及 G_2，求出将 G_1 的顶点一一映到 G_2 的顶点上，并使得 G_1 上的任意一对相邻顶点的映像都不是 G_2

---

① 本节有删节.——译者注

上的相邻顶点的映射的个数. 说明餐桌问题(见 Aspvall 和 Liang[1],Robbins[10])也能用这样的术语来表述,并用容斥原理求解. 给出“非弱”的餐桌问题的陈述并解之. 说明夫妇入座问题也能用这样的术语表述,并讨论这种表述形式有多大用处. 对 Latin 矩形计数问题(见 Ryser[11])也进行同样的讨论.

参 考 文 献

[1] B. Aspvall and F. M. Liang, The dinner table problem, Report STAN-CS-80-8222, Computer Science Department, Stanford University, Stanford, CA, 1980.

[2] J. H. Conway, An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties, pp. 329—358 in Computational Problems in Abstract Algebra, ed. J. Leech, Pergamon, Oxford, 1970.

[3] M. E. Fisher, Statistical mechanics of dimers on a plane lattice, *Phys. Rev*., 124(1961)1664—1672.

[4] E. N. Gilbert, Knots and classes of ménage permutations, Scripta Math., 22(1956)228—233.

[5] I. Kaplansky, Solution of the probléme des ménages, Bull. Amer. Math. Soc., 49(1943)784—785.

[6] I. Kaplansky and J. Riordan, The probléme des ménages, Scripta Math., 12(1946)113—124.

[7] P. W. Kasteleyn, Dimer Statistics and Phase Transitions, *J. Math. Phys*., 4(1963)287—293.

[8] E. Lucas, Théorie des nombres, Gauthier-Villars, Paris, 1891.

[9] J. Riordan, An Introduction to Combinatorial Analysis, Wiley, New York, 1958.

[10] D. Robbins, The probability that neighbors remain neighbors after

random rearrangements, *Amer. Math. Monthly*, 87 (1980) 122—124.

[11] H. J. Ryser, Combinatorial Mathematics, Carus Mathematical Monograph No. 14, Mathematical Association of America, Washington, DC, 1963.(中译本:组合数学,科学出版社,1983.)

[12] P. G. Tait, On knots, Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ, pp. 273—347 in Scientific Papers, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1898.

[13] J. Touchard, Sur un probléme des permutations, *C. R. Acad. Sciences Paris*. 198(1934)631—633.

[14] H. Wilf, What is an answer?, *Amer. Math. Monthly*, 89 (1982) 289—292.

(朱 烈译,朱学贤校)

NIM 游戏——一个启发性的探讨

JULIUS G. BARON

NIM 游戏(The Game of Nim)[①]是一种两人玩的游戏. 玩时,把筹码分成若干堆,每堆筹码的数目是任意的. 然后双方轮流拿走筹码. 每次拿时,只能从一堆里拿,不许从不同堆里拿,且每次至少拿走一个或拿几个甚至一堆筹码. 谁抢到最后一次拿,谁就是胜者.

Bouton 在1902年出版的 Annals of Mathematics 上首先叙述了这种游戏,也给出了获胜的策略并论证了它的正确性. 此后有许多文章曾论述过该游戏和它的获胜策略. Hardy 与 Wright 合著的书:"An Introduction to the Theory of Numbers"(1954, 第117—120页)中,也讲述了该游戏的解. 就我所知,还没有一本书和文章论述策略问题的解是如何发现的,从教学的角度来看,问题的解是如何得到的往往更重要,特别对 Nim 游戏更是这样,因为它的获胜策略看来似乎与问题并无直接联系.

1963年,我曾与数学界朋友谈到 Nim 游戏,当我表示我对 Nim 策略如何获得的问题能给予一个解释时,匈牙利 High School Mathematics Magazine 的编辑建议我把它发表出来,这就是出现在1964年该杂志上的一篇论文. 文中从具体问题出

① 据说这是一种古老的中国游戏,叫作筹码游戏. ——译者注

发一步步引导到一般策略的分析. 此文是上文的修改稿.

正如 Hardy 与 Wright 所指出的,"这种游戏有一精确的数学理论,事先能判断其中一方可获胜". 事实上,von Neumann 有这样一条定理:一种具有完全确定讯息的游戏(例如象 Nim 游戏)必有一确定的取胜策略. 但我们不打算应用这一理论,我们只在假定策略存在的前提下,指出如何从实践经验中捉摸出策略的一些性质,并由此揭示出获胜的策略.

我们称在任何一次拿取之后每堆筹码数目的集合为游戏在该时刻的"状态",并用圆括弧内依非降顺序填入每堆筹码的数目所构成的数组来表示这个状态. 例如,(2,4,4,7,9)表示一个五堆的状态. 为简单起见,我们就把状态称为数组,并根据堆(即数组中的数)的个数相应地说一元数组,二元数组,三元数组等等.

若游戏的双方都熟知获胜的策略,显然初始数组便决定了游戏的结局. 因此,可以把初始数组分成两类:先拿一方能获胜的初始数组称为赢数组,先拿一方不能获胜的初始数组称为输数组.

经验指出,输数组的数量少,因此我们先寻求输数组的特征. 事实上我们认识了输数组,也就朝获胜策略的方向上前进了一大步.

下面关于两类数组的关系是显然的.

1. 输数组拿一次筹码后,必定变为赢数组;

2. 赢数组一定可以适当拿一次筹码后,使其变为输数组;

3. 输数组的一般特征必定包含最简单的输数组(1,1).

先考察一些简单的数组. 一元数组不管它包含多少筹码

都是赢数组. 二元数组 (a,b) 是一输数组当且仅当 $a=b$. 事实上数组 (a,b) 拿一次后使两堆数目不等,再拿一次后总可使两堆数目再度相等.

三元数组若是输数组,则三个数一定两两不等. 因为三元数组(a,b,b),拿走《a》后,将变为输数组(b,b).

最简单的三数不等的三元数组是$(1,2,3)$. 拿一次后出现下列六种可能$(0,2,3)$,$(1,1,3)$,$(1,0,3)$,$(1,2,2)$,$(1,2,1)$,$(1,2,0)$,显然再拿一次后都变为输数组,所以$(1,2,3)$为一输数组. 保留最小数为1的情况下,接下去这种最简单的三元数组是$(1,2,4)$,$(1,3,4)$,经一次适当的拿取后,均能变为$(1,2,3)$,所以它们是赢数组. 同理$(1,2,5)$与$(1,3,5)$也是赢数组. 另一方面,对于数组$(1,4,5)$,考虑它的各种可能拿法,即可看出它是输数组. 一般地,数组$(1,2k,2k+1)$是一输数组,因为任意拿一次后,总可再经一次适当的拿取使其变为$(2k,2k)$或$(1,1)$或$(1,2n,2n+1)$$(n<k)$.

对最小数大于1的三元数组,拿一次后可能出现的情形大大增加,用上面这种讨论方法就行不通了,需要用别的办法来处理.

任一三元数组包含三个数对作为它的子集. 我们用下面的“排除原理”来考虑这些数对. 如果一个三元数组的集合中的每一个都是输数组,那么任一数对只可能在这些数组的全部这种子集中出现一次. 事实上,若(a,b,c)与(a,b,d)是两个三元数组,且 $d>c$,它们同以数对(a,b)为其子集. 拿一次后可使 d 变为 c,这表明(a,b,c)与(a,b,d)不可能同时为输数组.

据此我们给出如何获得没有公共数对的三元数组的程序.

首先我们把具有相同较小数的数对排成一行，且按对中较大数递增的顺序排列这些数对.再按行中较小数递增的顺序排列这些行.由此得到一矩形阵(见表1).

表 1

(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	(1,7)
(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)	(2,7)	
(3,4)	(3,5)	(3,6)	(3,7)		
(4,5)	(4,6)	(4,7)			
(5,6)	(5,7)				
(6,7)					

由表看出，对角线上数对有相同的较大数，我们就用该数来称呼这对角线.如在表1中，我们可以说对角线7却好在对角线6之下.矩形阵也可以看成不断地添加对角线而得到的.

我们先来说明如何利用对角线6以上的数对，得出无公共数对的三元数组的过程.不妨引入一名词，称两个数对是相容的，如果它们的和集是一三元数组.

第一个数对(1,2)与下一个相容的数对(1,3)相结合得到三元数组(1,2,3).根据“排除原理”，进一步考虑时可以将数对(1,2)，(1,3)和(2,3)排除.下一个可用的数对是(1,4)，相容的数对是(1,5)，它们形成三元数组(1,4,5)，因此数对(1,4)，(1,5)，(4,5)也可排除.数对(1,6)在对角线6之上没有相容数对，但它不能排除，因为当添加对角线时就会出现相容的数对.类似于第一行处理，后面几行有相容数对(2,4)与(2,

6),(3,5)与(3,6),得三元数组(2,4,6)和(3,5,6).这样对角线6以上的数对共形成四个三元数组，还留下三个数对备用.

我们添加对角线7的数对,如上考虑得三元数组(1,6,7),(2,5,7)和(3,4,7).总共得七个三元数组.这时对角线7以上的数对全部用完,没有一个数对留下备用.

不断地添加对角线,不断地形成可能出现的三元数组.直到添至对角线15时,再次所有数对全部用完,我们称对角线7与15为完全对角线.

再下一条完全对角线是31.从对角线31以上的465个数对中,共形成155个三元数组.为简单起见,我们称这些三元数组的集合为集合 L_{31}.这集合中的元素具有输数组的一些特征.如改变该集合的任一三元数组中任一数,所得数组就不属于该集合.特别重要的是:在实际玩 Nim 游戏时,若初始数组是 L_{31}的元素,当对方拿了一次后,利用 L_{31}表总能取胜[①],所以根据经验 L_{31}集合是输数组集合.为了把这结果引导到精确形式,我们来观察这155个三元数组.

基于观察方便,把155个数组按其最小数排成一列,每列按中间数大小顺序排(见表2).

每一三元数组记为$(a,b,c)(a<b<c)$,通过观察可得下面论证时要用到的一些性质:

1. 若$(a,b,c)\in L_{31}$,则 $a+b+c$ 为偶数;

2. 若$(2a,2b,2c)\in L_{31}$,则$(a,b,c)\in L_{31}$;

3. 若$(a,b,c)\in L_{31}$,且 a,b,c 中两个为奇数,则这两个奇数减1所得的三元数组也属于 L_{31};

---

① 即再拿一次使所得三元数组仍属于集合 L_{31}. —— 译者注

表 2

1,2,3	2,4,6	3,4,7	4,8,12	5,8,13	6,8,14	7,8,15	8,16,24
4,5	5,7	5,6	9,13	9,12	9,15	9,14	17,25
6,7	8,10	8,11	10,14	10,15	10,12	10,13	18,26
8,9	9,11	9,10	11,15	11,14	11,13	11,12	19,27
10,11	12,14	12,15	16,20	16,21	16,22	16,23	20,28
12,13	13,15	13,14	17,21	17,20	17,23	17,22	21,29
14,15	16,18	16,19	18,22	18,23	18,20	18,21	22,30
16,17	17,19	17,18	19,23	19,22	19,21	19,20	23,31
18,19	20,22	20,23	24,28	24,29	24,30	24,31	
20,21	21,23	21,22	25,29	25,28	25,31	25,30	
22,23	24,26	24,27	26,30	26,31	26,28	26,29	
24,25	25,27	25,26	27,31	27,30	27,29	27,28	
26,27	28,30	28,31					
28,29	29,31	29,30					
30,31							

9,16,25	10,16,26	11,16,27	12,16,28	13,16,29	14,16,30	15,16,31
17,24	17,27	17,26	17,29	17,28	17,31	17,30
18,27	18,24	18,25	18,30	18,31	18,28	18,29
19,26	19,25	19,24	19,31	19,30	19,29	19,28
20,29	20,30	20,31	20,24	20,25	20,26	20,27
21,28	21,31	21,30	21,25	21,24	21,27	21,26
22,31	22,28	22,29	22,26	22,27	22,24	22,25
23,30	23,29	23,28	23,27	23,26	23,25	23,24

4. 完全对角线对应于数2^n-1，$n=3,4,5$.

设想形成三元数组的过程无限地进行下去，从而得到一个递增的三元数组集合 L 的序列. 我们猜想它们都是输数组且具有上述几条性质. 这样，集合 L 中每一三元数组必定或者只有一个数是偶数，或者三个数都是偶数；若三个数都是偶数，每个数除2所得的三元数组也属于集合 L；若只有一个数是偶数，则其形式为$(2k+1,2m+1,2n)$或它的一个置换，奇数都减1，然后每个数除2所得的三元数组也属于集合 L.

我们通过三元数组(25,43,50)，(16,39,47)和(29,63,66)来说明这一点.

表 3

例 1	例 2	例 3
25,43,50	16,39,47	29,63,66
12,21,25	8,19,23	14,31,33
6,10,12	4,9,11	7,15,16
3,5,6	2,4,5	3,7,8
1,2,3	1,2,2	1,3,4
0,1,1		0,1,2

利用上述性质，在例1，我们最后得到的是输数组. 所以数组$(25,43,50)\in L$；在例2，最后一个三元数组各数之和为奇数，所以数组(16,39,47)不属于集合 L；例3的最后一个三元

数组情形同例2. 所以数组(29,63,66)也不属于集合 L. 事实上用此方法能判断任一三元数组是否属于集合 L. 当数字相当大时,这方法实际使用起来是很麻烦的,而且不能应用于 n 元数组($n>3$).

有一明显的技巧可简化上述方法,使实际应用起来很方便,尤其重要的是它对多元数组也适用,且提供了证明方法.

上面我们由一个三元数组得出下一三元数组,只用到两种算术运算:除2与减1. 若把三元数组的数表示成二进位制的形式,则两种运算的结果只反映在最后一位数字上. 若一个数是偶数,它的二进制表示的最后一位数字是0,该数除2,只是简单地抹去最后一位数字0. 若一个数是奇数,它的二进制表示的最后一位数字是1,该数减1,只是简单地把最后一位数字1换成0. 表3中的例1与例2,若用二进制来表示即为表4.

表 4

例 1			例 2		
11001	101011	110010	10000	100111	101111
1100	10101	11001	1000	10011	10111
110	1010	1100	100	1001	1011
11	101	110	10	100	101
1	10	11	1	10	10
0	1	1			

用二进制化简过程可概括如下:先看三个数的末位数字

是否都是0或只有一个是0，相当于看三个数的末位数字中，1出现的次数是否是偶数次，若是，就抹去三个数的末位数字．这样一步步做下去．若得到一三元数组，它的末位数字中，1出现的次数是奇数次，或末位数字之和为奇数，因而三个数之和也为奇数，则这个三元数组及导出它的前面所有三元数组都不是输数组．

若我们把三元数组的三个二进位数如同作加法一样把它们纵排起来，考虑这些二进位数在同一位上的数字构成的列．这样，上面的逐步抹去法是看所得三个数的末位数字中，1出现的次数是否是奇数次，实际上就是看每一列数字中，1出现的次数是否是奇数次．于是，我们最终得到三元数组的判别法则：写每堆筹码数为二进位数，然后如同作加法一样把它们纵排起来，并求出每一列上的数字之和[①]．数组是输数组当且仅当每一列上的和为偶数(表5)．

表 5

11001	10000
101011	100111
110010	101111
——	——
222022	211222

这就是通常所说的 Nim 策略规则．它的正确性的演绎证

① 注意：这些和可以出现2，3，不要进位．——译者注

明可以在前面所提到的 Hardy 与 Wright 的书中找到[①]. 这证明把我们前面的猜测变为确凿的事实,此外,这一规则与它的证明对任意多堆筹码也成立. 这规则也为如何使赢数组拿一次后变为输数组提供了一个简单的方法.

（方企勤译，潘承彪校）

---

① 事实上,在三堆筹码的情形,读者应该能自己给出一个这样的证明. 应该看出,在两堆筹码情形,输数组就是"对称"——即两堆筹码数相等——状态的出现. 同样,在三堆筹码情形,利用二进位后,输数组也就是一种"对称"状态的出现,请读者考虑这是怎样的一种"对称"状态. 这种观点可以推广到任意堆的情形. 因此,筹码游戏的决胜策略实际上是对称与二进位的一次巧妙应用. ——编者注

关于多面体的面

BENJAMIN L. SCHWARTZ

一个多面体的两个面称为是相容的，如果这两个面有相同的棱数(或顶点数). 本文证明了如下定理：

定理 每个单连通的多面体至少有三对相容的面.

我们约定多面体的每个顶点至少与三个面相关联，即此顶点至少是三个面的顶点. 这个约定排除了一条棱的再细分. 否则，我们可以将一个真三角形转换为一个具有两个相邻共线棱的假“四边形”. 显然，这样做的结果得到的不是一个新多面体，而是原先多面体的一个不同的解释.

定理的证明要用到欧拉公式 E(边数)$=V$(顶点数)$+F$(面数)-2和下面的引理：

引理 设 F_i 为多面体面 i 的棱数，那么

$$F-2 \geqslant (1/6)\sum F_i.$$

证明 因为每个顶点至少与三个面相关联，所以，如果我们按面计算顶点数，那么每一个顶点至少要算三次，即$3V \leqslant \sum F_i$. 类似地，如果我们按面算棱数，每一条棱恰好要算两次，有$2E=\sum F_i$. 结合这些结果得

$$\frac{1}{2}\sum F_i = E = V + F - 2 \leqslant (1/3)\sum F_i + F - 2,$$

这就立即推出引理结论.

定理的证明 现假定存在一个多面体恰恰具有两对相容的面. 因为 $F_i \geqslant 3$,那么 F_i 最小的取值可能是

$$3,3,4,4,5,6,7,\cdots,F.$$

不看前三项这是一个等差数列,因此

$$\sum F_i \geqslant \frac{1}{2}F(F+1)+4.$$

再由引理结论,我们得到

$$F-2 \geqslant (1/6)\sum F_i \geqslant (1/6)\left[\frac{1}{2}F(F+1)+4\right],$$

化简后有

$$F^2-11F+32 \leqslant 0.$$

但因为判别式小于零,这个二次式是正定的. 因而所需要的不等式条件决不会满足. 定理得证.

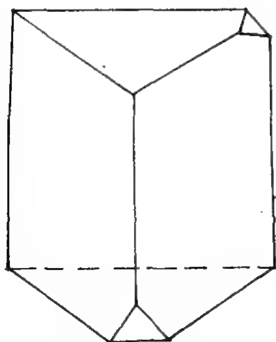


图 1

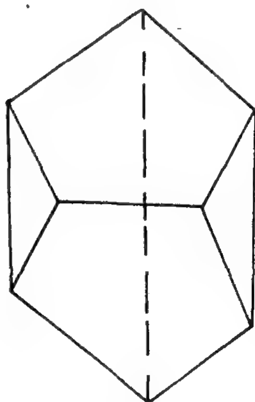


图 2

上述论述证明了不存在少于三对相容面的多面体.图1和图2说明存在恰有三对相容面的多面体.具有三对相容面的多面体只有这两种图形,我们把它的证明留给读者.特别的,不存在具有三个一组相容面且没有其它相容对的多面体.

（刘　勇译，方企勤校）

Cardan 公式及四次方程[①]

R. Chalkley

译者注 这篇文章用到了有关数域的一些知识，为使不熟悉数域知识的读者便于理解，我们对原文作了一些更改，仅考虑复数域 C. 熟悉数域知识的读者可以参阅译文中的注.

1. 引言

1956年，Chao-Hui Young 博士告诉我一种很有意思的方法，他用3×3阶循环矩阵得到了三次方程根的 Cardan 公式. 最近，用同样的方法，我用4×4阶循环矩阵发现了四次方程根的类似公式. 有关三次方程的结果在本文的 § 2中给出. § 4中的定理1叙述了我做的有关四次方程的工作. § 5和 § 6讨论它们和另一种求解技巧的联系.

先说明一点，本文中所讨论的多元多项式的系数都在复数域 C 中，多项式的除法也在复数域 C 中考虑[②].

---

① Cardan's formulas and biquadratic equations, *Math. Magazine*, 47(1974), 8—14.

② 熟悉数域知识的读者，可以认为本文中多项式的系数属于某个数域 F，并要求方程的根也属于 F，只要 F 满足以下条件：F 是一个特征数≠2，3的域，对于 F 中的任意元素 γ，方程 $X^2=\gamma$ 有一个根属于 F，$X^3=\gamma$ 也有一个根属于 F. 对于这样的数域 F，本文中的结果都成立. ——译者注

2. Cardan 公式

利用循环矩阵

$$\begin{bmatrix} X & Y & Z \\ Z & X & Y \\ Y & Z & X \end{bmatrix} \tag{1}$$

很容易证明并记住下面的公式：

$$X^3 + (-3YZ)X + (Y^3 + Z^3) = (X + Y + Z)(X + \omega Y + \omega^2 Z)(X + \omega^2 Y + \omega Z), \tag{2}$$

其中的 $\omega = e^{2\pi i/3}$，是1的主三次根. 显见，(2)式的左边是矩阵(1)的行列式 D，它是一个三元多项式. 另外，对矩阵(1)作行变换，所得矩阵的行列式等于 D. 因此，在第1行 (X,Y,Z) 上加上第2行 (Z,X,Y) 及第3行 (Y,Z,X) 后可以看到，$X+Y+Z$ 是行列式 D 的一个因子；因为 $\omega^3=1$，所以在行 (X,Y,Z) 上加上 $\omega^2(Z,X,Y)$ 及 $\omega(Y,Z,X)$ 后可以看到，$X+\omega Y+\omega^2 Z$ 也是 D 的一个因子；同样可证 $X+\omega^2 Y+\omega Z$ 也是 D 的因子. 由于这三个三元一次多项式两两之比都不等于常数，所以它们的乘积必整除 D，由此可以推出它们的乘积必等于 D（请读者自己证明）.

在等式(2)中用 $-Y$ 代替 Y 及用 $-Z$ 代替 Z，可得

$$X^3 + (-3YZ)X + (-Y^3 - Z^3) = \prod_{s=0}^{2}(X - \omega^s Y - \omega^{2s} Z). \tag{3}$$

设 α 及 β 是复数，为了求解三次方程

$$X^3 + \alpha X + \beta = 0, \tag{4}$$

我们去寻求方程组

$$-3YZ=\alpha,\quad -Y^3-Z^3=\beta \tag{5}$$

的解(y_0,z_0). 这时要分2种情形讨论.

(1) $\alpha\neq 0$或者 $\beta\neq 0$. 这时设 t_0是方程

$$T^2+\beta T+\left(-\frac{\alpha}{3}\right)^3=0$$

的非零解, y_0是方程 $y^3=t_0$的解. 由于 $y_0\neq 0$, 所以令 $z_0=-\alpha/3y_0$. 因此(y_0,z_0)是方程组

$$YZ=-\frac{\alpha}{3},\quad (Y^3)^2+\left(-\frac{\alpha}{3}\right)^3=-\beta Y^3$$

的解. 又因为 $y_0\neq 0$, 所以(y_0,z_0)是方程组(5)的解.

(2) $\alpha=0$及 $\beta=0$. 这时可以取 $y_0=0$及 $z_0=0$.

在等式(3)中, 用 y_0代替 Y 及用 z_0代替 Z, 得

$$X^3+\alpha X+\beta=\prod_{s=0}^{2}(X-\omega^s y_0-\omega^{2s}z_0).$$

从而有, 方程(4)的3个根 X_1, X_2及 X_3可表为

$$X_{s+1}=\omega^s y_0+\omega^{2s}z_0,\quad s=0,1,2.$$

给定一个三次方程 $\bar{X}^3+\alpha_1\bar{X}^2+\alpha_2\bar{X}+\alpha_3=0$, 其中 α_1, α_2和 α_3是复数, 作变换 $\bar{X}=X-(\alpha_1/3)$, 则可将它变为形式(4). 因此, **任意一个复系数三次方程均可解**.

3. 循环矩阵的行列式

下面是[2]中结果的一个变形, 后文将用到它.

引理 设 $n\geqslant 2$，ρ 是 n 次本原单位根[①]，$C[X_1,\cdots,X_n]$ 是全体复系数 n 元多项式的集合，令

$$A=\begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_{n-1} & X_n \\ X_n & X_1 & \cdots & X_{n-2} & X_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ X_3 & X_4 & \cdots & X_1 & X_2 \\ X_2 & X_3 & \cdots & X_n & X_1 \end{bmatrix},$$

则 $\det A$（即矩阵 A 的行列式——译者注）$=f_0f_1\cdots f_n$，其中

$$f_s=X_1+\rho^sX_2+\rho^{2s}X_3+\cdots+\rho^{(n-1)s}X_n,$$

$$s=0,1,\cdots,n-1.$$

证明 显然可见，$\det A$ 是一个 n 元 n 次齐次多项式. 记 R_k 是矩阵 A 的第 k 行，$k=1,2,\cdots,n$. 对于整数 s，$0\leqslant s\leqslant n-1$，令

$$R=R_1+\sum_{k=2}^{n}\rho^{(n-k+1)s}R_k,$$

则 $R=(f_s,\rho^{(n-1)s}f_s,\rho^{(n-2)s}f_s,\cdots,\rho^sf_s)$. 用 R 代替 A 的第一行，所得矩阵记为 B. 易证 $\det A=\det B$，且对任意 s，f_s 整除 $\det A$. 因为 $f_0,f_1,\cdots,f_{n-1}$ 都是 n 元一次多项式，而且对于满足 $0\leqslant j<k\leqslant n-1$ 的整数 j 和 k，$\rho^j\neq\rho^k$，f_j 和 f_k 之比不等于常数，所以 $\det A$ 能被 $f_0f_1\cdots f_{n-1}$ 整除（请读者证明——译者注）. 设

$$\det A=qf_0f_1\cdots f_{n-1}.$$

又因为在 $\det A$ 及在 $f_0f_1\cdots f_{n-1}$ 中，X_1^n 的系数都等于1，所以 $q=1$. 引理证得.

---

① ρ 被称为是 n 次本原单位根，如果 $\rho^n=1$ 但 $\rho^k\neq 1$（$1\leqslant k<n$）. 例如 $e^{2\pi i}/n$ 就是一个 n 次本原单位根. $\rho^{2\pi ir}/n$，$1\leqslant r\leqslant n$ 且 r 与 n 互素，给出全部 n 次本原单位根. ——译者注

4. 四次方程根的公式

设 $n=4$ 及4次本原单位根 $\rho=i(i^2=-1)$，由§3的引理得

$$\begin{vmatrix} X & U & V & W \\ W & X & U & V \\ V & W & X & U \\ U & V & W & X \end{vmatrix} = \prod_{s=0}^{3}(X + i^s U + i^{2s} V + i^{3s} W).$$

展开上面的行列式并用 $-U,-V,-W$ 分别代替 U,V,W 得

$$\begin{aligned} & X^4 + (-2V^2 - 4UW)X^2 + (-4U^2V - 4VW^2)X \\ & \quad + (-U^4 + V^4 - W^4 + 2U^2W^2 - 4UV^2W) \\ & \quad = \prod_{s=0}^{3}(X - i^s U - i^{2s} V - i^{3s} W). \end{aligned} \tag{6}$$

由此等式可导出下面的结果.

定理1 设 a,b,c 都是复数. 当 $a=b=c=0$ 时，令 $u_0=v_0=w_0=0$；否则令 v_0 是方程

$$(4V^2)^3 + 2a(4V^2)^2 + (a^2 - 4c)(4V^2) - b^2 = 0 \tag{7}$$

的非零解，并设复数 u_0,w_0 满足等式

$$UW = -\frac{V_0^2}{2} - \frac{a}{4} \text{ 及 } U^2 + W^2 = -\frac{b}{4v_0}, \tag{8}$$

则四次方程

$$X^4 + aX^2 + bX + c = 0 \tag{9}$$

的根 x_1,x_2,x_3,x_4 可表为

$$x_{s+1} = i^s u_0 + i^{2s} v_0 + i^{3s} w_0, \quad s = 0,1,2,3. \tag{10}$$

证明 首先，我们来验证 (u_0,v_0,w_0) 是方程组

$$4UW = -2V^2 - a, \tag{11}$$

$$4V(U^2 + W^2) = -b, \tag{12}$$

及

$$(U^2 + W^2)^2 + 8UWV^2 = \frac{a^2 - 4c}{4}, \tag{13}$$

的解. 如果 $a=b=c=0$. 则结论显然. 对于 $v_0 \neq 0$,我们将(7)式改写为

$$4^2V^2\left(\frac{a^2 - 4c}{4} - 2(-2V^2 - a)V^2\right) = b^2; \tag{14}$$

则 (u_0, v_0, w_0) 是(7),(8),(11),(12)及(14)的解,而且

$$4^2V^2\left(\frac{a^2 - 4c}{4} - 8UWV^2\right) = 4^2V^2(U^2 + W^2)^2;$$

因此,如果 $v_0 \neq 0$,则 (u_0, v_0, w_0) 也是(13)的解.

然后,利用(11)消去(13)中的 a;可推出 (u_0, v_0, w_0) 满足

$$-2V^2 - 4UW = a, \tag{15}$$

$$-4U^2V - 4VW^2 = b, \tag{16}$$

以及

$$-U^4 + V^4 - W^4 + 2U^2W^2 - 4UV^2W = c. \tag{17}$$

在(6),(15),(16)及(17)中代入 (u_0, v_0, w_0) 得到

$$X^4 + aX^2 + bX + c = \prod_{s=0}^{3}(X - i^s u_0 - i^{2s} v_0 - i^{3s} w_0).$$

因此,方程(9)有4个根,且由(10)式表出.

5. 进一步的探讨

在定理1中,$4v_0^2$ 是

$$Y^3 + 2aY^2 + (a^2 - 4c)Y - 6^2 = 0 \tag{18}$$

的根. 下面我们着手建立方程(18)的所有3个根与定理1的联系.

命题 设复数 u_0, v_0 及 w_0 满足(11),(12)和(13).令

$$r_1 = (1+i)u_0 + (1-i)w_0, \quad r_2 = 2v_0, \quad r_3 = (1-i)u_0 + (1+i)w_0. \tag{19}$$

则有 $r_1r_2r_3 = -6$ 且方程(18)的3个根分别是 r_1^2, r_2^2 及 r_3^2.

证明 由(19),(11),(13)及(12)推得

$$\begin{aligned}(Y - r_1^2)(Y - r_2^2)(Y - r_3^2) &= (Y - r_2^2)(Y^2 - 8u_0w_0Y + 4(u_0^2 + w_0^2)^2) \\ &= Y^3 + (-4v_0^2 - 8u_0w_0)Y^2 + (4(u_0^2 + w_0^2)^2 \\ &\quad + 32u_0w_0v_0^2)Y - 16v_0^2(u_0^2 + w_0^2)^2 \\ &= Y^3 + 2aY^2 + (a^2 - 4c)Y - b^2\end{aligned}$$

及

$$r_1r_2r_3 = 4v_0(u_0^2 + w_0^2) = -b.$$

在[4]中,方程(18)是作为方程(9)的三次预解式给出的,而且还建立了不同的求解程序.下面我们从定理1导出[4]中的解的公式.

定理2 设复数 r_1, r_2 及 r_3 满足

$$(Y - r_1^2)(Y - r_2^2)(Y - r_3^2) = Y^3 + 2aY^2 + (a^2 - 4c)Y - b^2, \tag{20}$$

及

$$r_1r_2r_3 = -b. \tag{21}$$

则方程(9)的4个根是

$$\begin{aligned}x_1 &= (+r_1 + r_2 + r_3)/2, \\ x_2 &= (+r_1 - r_2 - r_3)/2, \\ x_3 &= (-r_1 + r_2 - r_3)/2, \\ x_4 &= (-r_1 - r_2 + r_3)/2.\end{aligned} \tag{22}$$

证明 我们用下面的关系式来定义 u_0, v_0 及 w_0:

$$
\begin{aligned}
&4u_0 = (1-i)r_1 + (1+i)r_3, \quad 2v_0 = r_2, \\
&4w_0 = (1+i)r_1 + (1+i)r_2.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

利用(23),(20)及(21),得

$$
4u_0w_0 + 2v_0^2 = \frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}{2} = -a,
$$

$$
4v_0(u_0^2 + w_0^2) = r_1r_2r_3 = -b
$$

及

$$
\begin{aligned}
&(u_0^2 + w_0^2)^2 + 8u_0w_0v_0^2 \\
&\quad = \frac{r_1^2r_2^2 + r_1^2r_3^2 + r_2^2 + r_3^2}{4} = \frac{a^2 - 4c}{4}.
\end{aligned}
$$

因此,(u_0, v_0, w_0)是(11),(12)及(13)的解.由定理1可知,(9)的根是由(10)给出的.对于 $s=0,1,2,3$,我们利用(10)及(23)就可得到(22).

6. 几点补充

(a) 给定复数 λ 及 μ,可以这样来指定方程组

$$
UW = \lambda, \quad U^2 + W^2 = \mu \tag{24}
$$

的解:如果 $\lambda=\mu=0$,则令 $u_0=w_0=0$;否则设 t_0是方程 $T^2-\mu T+\lambda^2=0$的非零解,令 u_0满足等式 $U^2=t_0$及 $w_0=\lambda/u_0$.这样就能求出方程组(8)的解.

(b) 在方程(9)中,如果 $b=0$,则条件

$$
V = 0, \quad UW = -\frac{a}{4}
$$

及

$$
(U^2 + W^2)^2 = \frac{a^2 - 4c}{4}
$$

既解得方程(9)的根(10),又给出了(11),(12)及(13)的解.这

时，只要在(24)中取 $\lambda=-\frac{a}{4}$ 及满足等式 $\mu^2=(a^2-4c)/4$ 的 μ 就可以了. 当然，如果 $b=0$，则方程(9)可以作为 X^2 的二次方程直接解出来.

(c) 设 S_1 是由(9)的4个根的全排列所组成的集合，S_2 是由(11)，(12)及(13)的所有解所组成的集合，S_3 是满足(20)和(21)的所有三元数组 (r_1,r_2,r_3) 所组成的集合. 我们说，**存在 S_2 到 S_1 上的一个双射**. 下面，我们证明由关系式(10)给出的从 S_2 到 S_1 的映射就是一个双射. 首先，它显然是一个单射. 其次，为了证明它是一个满射，我们设 (x_1,x_2,x_3,x_4) 是 S_1 的一个元素，则 $x_1+x_2+x_3+x_4=0$；由线性方程组理论，我们可求得唯一的一组数 u_0,v_0 及 w_0 满足方程组(10)①. 由(6)式可知 (u_0,v_0,w_0) 也是方程组(15)，(16)及(17)的解，因此 (u_0,v_0,w_0) 是 S_2 中的一个元素，它在映射(10)下的像显然就是 (x_1,x_2,x_3,x_4). 这就证得了所要的结论. 类似地可以证得，**存在 S_3 到 S_1 上的一个双射**. 此外，由(19)及(23)可直接得到，**集合 S_2 和 S_3 是一一对应的**.

(d) 在[3]中，给出了另一种方法去推导方程(9)的三次预解式. 基于 Galois 理论，[3]中的解的公式与(18)，(20)，(21)及(22)是类似的. 记号的不同是由于在(18)中用 $-Y$ 去代替 Y 时必然产生的变化造成的.

(e) 对于任意一个复系数四次方程

$$\bar{X}^4+a_1\bar{X}^3+a_2\bar{X}^2+a_3\bar{X}+a_4=0,$$

作变换 $\bar{X}=X-(a_1/4)$ 后，就成为形式(9). 所以结论是：**任意**

① 由于 $x_1+x_2+x_3+x_4=0$，所以方程组(10)的4个方程中，只有3个是独立的，从而可解得唯一的 u_0,v_0 及 w_0. ——译者注

一个复系数四次方程都可解.

7. 例子

在方程

$$X^4 - 2\beta^2 X^2 - 4\alpha^2\beta X + (\beta^4 - \alpha^4) = 0 \qquad (25)$$

中,α 及 β 都是复数且都不等于0. 取

$$a = -2\beta^2, \quad b = -4\alpha^2\beta, \quad c = \beta^4 - \alpha^4,$$

则有

$$(a^2 - 4c)(-2a) - b^2 = 0.$$

因此,相应的三次预解式(18)有一个根是$-2a$.

为了用定理1去解(25),我们取

$$4v_0^2 = -2a = 4\beta^2, \quad v_0 = \beta, \quad UW = 0,$$

$$U^2 + W^2 = \alpha^2, \quad u_0 = \alpha, \quad w_0 = 0.$$

从而由(10)得(25)的根是

$$x_{s+1} = i^s\alpha + i^{2s}\beta, \quad s = 0,1,2,3. \qquad (26)$$

在这种情形时,相比之下,定理2就显得不那么直接了. 首先,我们要求出方程(18)的3个根

$$2i\alpha^2, \quad 4\beta^2 \quad 及 \ -2i\alpha^2.$$

然后要选取 r_1,r_2及 r_3必须满足

$$r_1^2 = 2i\alpha^2, \quad r_2^2 = 4\beta^2, \quad r_3^2 = -2i\alpha^2$$

及

$$r_1 r_2 r_3 = 4\alpha^2\beta;$$

一种选择是取 $r_1=(1+i)\alpha$,$r_2=2\beta$ 及 $r_3=(1-i)\alpha$. 到了这时,我们才能用(22)去得到(25).

参 考 文 献

[1] S. Lang, Algebra, Addison-Wesley, Massachusetts, 1965, p. 127.

[2] T. Muir, A Treatise on the theory of determinants, Dover, New York, 1960, pp. 442—445.

[3] B. L. van der Waerden, Modern Algebra, vol 1, Ungar, New York, 1953, pp. 180—182.

[4] H. Weber, Lehrbuch der Algebra, vol 1, Chelsea, New York, 1963, pp. 135—136.

（朱学贤编译，潘承彪校）

平面几何中的一个周期性问题[①]

D. B. Shapiro

1. 引言

给定一个顶点为 z_0, z_1, z_2 的三角形 Z 和一个实数 $r \in (0, 1)$，我们可以定义一个新的三角形 $Z' = T_r(Z)$，其顶点 z'_0, z'_1, z'_2 为

$$z'_0 = (1-r)z_0 + rz_1,$$
$$z'_1 = (1-r)z_1 + rz_2,$$
$$z'_2 = (1-r)z_2 + rz_0.$$

因而 Z' 的每一顶点落在 Z 的相应的一条边上，且将该边分为两段，使得这两段的长度之比为 $r:(1-r)$（见图1）.

例如，当 $r=1/2$ 时，$Z' = T_{1/2}(Z)$ 就是所谓的中点三角形，我们知道 Z' 相似于 Z. 事实上，Z' 的每一条边的长度是 Z 的对应边的长度的1/2，并且它们是平行的.

对于 $r=\frac{1}{3}$ 的情形，令 $Z' = T_{1/3}(Z)$，$Z'' = T_{1/3}(Z')$，则 Z'' 的每一条边的长度是 Z 的对应边的长度的 $\frac{1}{3}$，并且它们是平行

---

① A periodicity problem in plane geometry, *The Amer. Math. Monthly*, 91 (1984), 97－108.

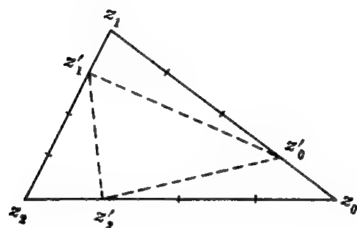
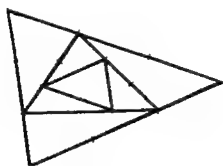
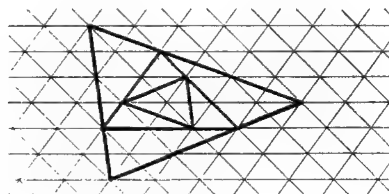


图1 ($r=1/4$)

的(见图2(a)). 因而 Z'' 与 Z 相似. 这些性质可以将 Z 放在一个适当的三角形网格中来验证,如图2(b).



(a)



(b)

图 2

现在回到一般的情形. 我们将 T_r 看作是定义在三角形的集合上的一个算子,对任意的正整数 m,显然 $T_r^m(Z)$ 是有意义

的，即令 $T_r^1(Z)=T_r(Z)$，$T_r^m(Z)=T_r(T_r^{m-1}(Z))$.

设 $r\in(0,1)$，如果对任意的三角形 Z，$T_r^m(Z)$与 Z 相似，则我们说比率 r 具有周期 m. 因而$\frac{1}{2}$具有周期1，$\frac{1}{3}$具有周期2，并且由对称性知$\frac{2}{3}$同样具有周期2.

问题1 给定整数 $m\geqslant1$，是否存在 $r\in(0,1)$使得 m 是 r 的最小周期？

问题2 哪些有理数 $r\in(0,1)$具有有限周期？

这篇文章将对这两个问题给出完全的答案. 更一般地，我们考虑 n 边形(具有 n 个顶点的多边形)的情形. 设 Z 是一个具有顶点 $z_0,z_1,\cdots,z_{n-1}$的 n 边形，则令 $T_r(Z)$是一个顶点为 z_0'，$z_1',\cdots,z_{n-1}'$的 n 边形，其中

$$\begin{aligned}
z_0' &= (1-r)z_0 + rz_1,\\
z_1' &= (1-r)z_1 + rz_2,\\
&\cdots\cdots\\
z_{n-1}' &= (1-r)z_{n-1} + rz_0.
\end{aligned}$$

如果 $n\geqslant4$，T_r 不可能在所有的 n 边形上是周期的. 但是它可在某些特殊的 n 边形上是周期的或“终极周期的”. 这种终极周期性的意思，粗略地说是指，对某一整数 $m>1$，n 边形序列 $T_r^{mj}(Z)$趋于一个极限形状(当 j 趋于无穷大时). 算子 T_r 在 n 边形上的终极周期性可以在计算机屏幕上作经验性观察. 这种观察是研究上述两个问题的动力. 对于这种常用于在计算机屏幕上展现这些多边形的 Applesoft Basic 计算机程序有兴趣的读者可与本文的作者联系.

例如，中点运算 $T_{1/2}$在每一 n 边形上是终极周期的(具有周期2). 在文献[FRS]的附录中已指出，这个事实是被许多作

者所独立观察到的. 本文的主要目的是决定所有的使得 T_r 在 n 边形上是周期的或终极周期的有理数 $r\in(0,1)$.

主要定理 设 $n\geqslant3$是一整数,$r\in(0,1)$是一有理数,则下述三个命题是等价的.

(i) 算子 T_r 在几乎所有的 n 边形上是终极周期的.

(ii) 算子 T_r 在某一非退化的非正 n 边形 Z 上是周期的.

(iii) 或者 $r=1/2$,或者 $n=3$且 $r=1/3,2/3$.

有很多文献讨论过作用在 n 边形上类似于 T_r 的变换,参考文献有[k],[Ne],[S],[BGS],[Ca],[BS],[D1],[D2],[D3],[Cl],[F],[Wo],[FRS]. 为了读者的方便起见,我们在下面的第1和第2节中将叙述并证明其中的几个著名的结果.

2. 多边形与轮换矩阵

设 $n\geqslant3$是一个固定的整数,平面上一个定向的 n 边形 $\mathscr{Z}$ 是指按顺序连接其顶点:$z_0\to z_1\to z_2\to\cdots\to z_{n-1}\to z_0$. 如果我们将这些点看作复平面 C 中的元素,则可将 $\mathscr{Z}$ 表示为一个列向量

$$Z=\begin{pmatrix}z_0\\z_1\\\vdots\\z_{n-1}\end{pmatrix}\in C^n.$$

令

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n\times n},$$

则 $\mathscr{Z}$ 的表示向量除 Z 外，还有 $\Pi Z, \Pi^2 Z, \cdots, \Pi^{n-1}Z$.

定义在 n 边形 $\mathscr{Z}$ 上的某些几何变换可以实现为定义在表示向量上的线性映照. 设 C 是一个 $n\times n$ 矩阵，如果 $C\Pi = \Pi C$，则由 n 边形 $\mathscr{Z}$ 可以得到一个新的 n 边形 $\mathscr{Z}'$，其表示向量为 CZ，显然这种规定与 $\mathscr{Z}$ 的表示向量的选取无关. 我们可以证明，如果 $C\Pi = \Pi C$，则 C 可以表示为 Π 的多项式，即 $C = c_0 I + c_1\Pi + c_2\Pi^2 + \cdots + c_{n-1}\Pi^{n-1}$，$c_i \in \mathbf{C}$（这个事实可以直接看出，也可以利用 $\mathbf{C}^n$ 是一个循环 $\mathbf{C}[\Pi]$模的事实.）. 这样的矩阵 C 叫做轮换矩阵，显然

$$C = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_2 & c_3 & c_4 & \cdots & c_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_0 \end{pmatrix}.$$

在这种情形，我们记 $C = \mathrm{circ}(c_0, c_1, \cdots, c_{n-1})$，并且令其伴随多项式为 $p(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{n-1}x^{n-1}$.

这样，前面定义在 n 边形上的算子 T_r 可用上述记号写为 $T_r = \mathrm{circ}(1-r, r, 0, \cdots, 0)$. 为了进一进研究 T_r^m，我们首先给出矩阵 Π 的特征值与特征向量. 如果 μ 是1在复数域 $\mathbf{C}$ 中的任意一个 n 次方根（即 $\mu^n = 1$），则令 $W(\mu) = (1, \mu, \mu^2, \cdots, \mu^{n-1})^t$，这里上标 t 表示转置，即 $W(\mu)$是一个列向量. 由于 $\Pi W(\mu) =$

$\mu W(\mu)$，因而 $W(\mu)$是 Π 的一个 μ-特征向量(即属于特征值 μ 的特征向量). 设 $\zeta=\exp(2\pi i/n)$，则我们得到 Π 的 n 个不同的特征向量 $W_k=W(\zeta^k)$，$0\leqslant k<n$.

如果 C 是一个轮换矩阵，$p(x)$为其伴随多项式，则由前面的定义知 $C=p(\Pi)$. 由此可知，W_k 是矩阵 C 的属于特征值 $p(\zeta^k)$的特征向量. 当 $C=T_r$ 时，其伴随多项式是 $p(x)=(1-r)+rx$，此时我们可以估计特征值的大小.

引理1 对 $r\in(0,1)$，矩阵 T_r 具有属于特征值 $\lambda_k=(1-r)+r\zeta^k$ 的特征向量 W_k，$0\leqslant k<n$. 并且 $\lambda_k(0\leqslant k<n)$满足

(1) $\lambda_{n-k}=\bar{\lambda}_k$，

(2) $1=\lambda_0>|\lambda_1|>|\lambda_2|>\cdots>|\lambda_q|$，其中 $q=[n/2]$.

证 首先注意记号$[n/2]$是表示不超过$\frac{n}{2}$的最大整数. 本引理中唯一需要证明的是不等式(2). 由于 T_r 的特征值落在中心为$1-r$ 半径为 r 的圆 $f(t)=(1-r)+re^{it}$上(见图3)，因而不等式(2)的成立就是显然的了.

从几何上看，W_k 是单位圆中的内接正 n 边形. 例如，$W_1=(1,\zeta,\zeta^2,\cdots,\zeta^{n-1})^t$ 是逆时针方向的凸正 n 边形，而 $W_{n-1}=\overline{W}_1$ 是与 W_1相同的多边形，但其定向是顺时针方向. 一般地，W_k 和 $W_{n-k}=\overline{W}_k$ 除定向相反外是相同的 n 边形. 如果$1<k<n$，n 边形 W_k 可能是自交的(“星形”)，有重边的，或退化的. 另外 $W_0=(1,1,\cdots,1)^t$ 是一个退化的 n 边形(所有的顶点都是1). 特征8边形的一些图形见图4.

由于特征向量 W_k 是对应于 n 个不同的特征值的，因而它们构成 $\mathbf{C}^n$ 的一个基. 事实上 W_k 关于 $\mathbf{C}^n$ 中通常的内积是正交的，且长度为$\sqrt{n}$. 下面我们将几何 n 边形 $\mathscr{Z}$ 与其表示向量 Z

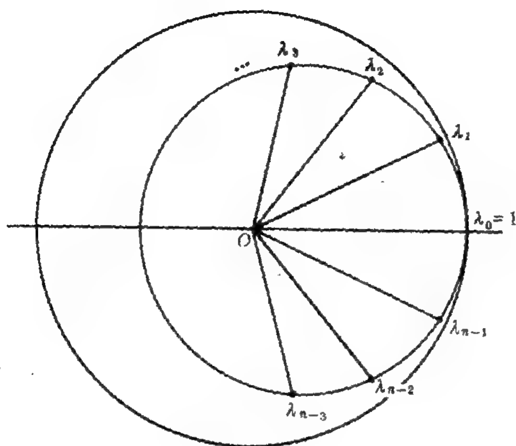


图 3

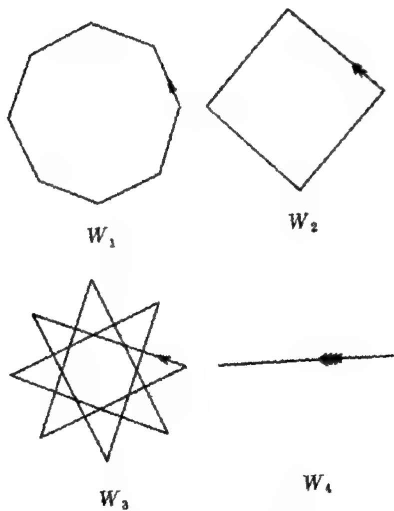


图4 一些特征8边形

看作是等同的，则每个 n 边形 Z 可以唯一地表示为特征 n 边形的组合：

$$Z = a_0W_0 + a_1W_1 + \cdots + a_{n-1}W_{n-1}.$$

系数 a_k 有时叫做 Z 的有限傅里叶系数(参考[S]).

系数 a_0是 Z 的形心，为了看清楚这一点，我们只需回忆一下 n 边形 $Z=(z_0,z_1,\cdots,z_{n-1})^t$ 的形心是$\frac{1}{n}\sum z_i$. 因而 W_0的形心为1，而其他 W_k 的形心为0.

将算子 T_r 重复地作用在 n 边形 $Z=a_0W_0+a_1W_1+\cdots+a_{n-1}W_{n-1}$上，则有

$$T_r^m(Z) = a_0W_0 + \lambda_1^m a_1W_1 + \cdots + \lambda_{n-1}^m a_{n-1}W_{n-1}.$$

由于$|\lambda_j|<1(1\leqslant j<n-1)$，因而当 m 趋于无穷大时，$T_r^m(Z)$趋于 a_0W_0.

如果 Z 是凸 n 边形，则显然所有 $T_r^m(Z)$也是凸的. 并且对许多非凸的多边形 Z，$T_r^m(Z)$也可能是凸的(对某些 m). 下面的定理是[BGS]中给出的，与此相关的结果还可参看文献[Ne]第233—234页和[Cl]，并且在[FRS]的附录中指出了进一步的参考文献.

定理2 设 $r\in(0,1)$，$Z=\sum_{k=0}^{n-1}a_kW_k$，如果$|a_1|\neq|a_{n-1}|$，则必有 m，使得 $T_r^m(Z)$是凸的. 因而对几乎所有的 n 边形 Z，$T_r^l(Z)$最终会变为凸的(当 l 充分大).

证明将在下面给出. 首先需要说明的是，所有自交的、有重边的和退化的多边形均被认为是非凸的. 这里的退化多边形是指有相邻三个顶点共线的多边形，因而特征多边形 W_k 中仅有 W_1和 W_{n-1}是凸的. 并且，如果多边形 Z 是凸的，Z'非常接近于 Z，则 Z'也是凸的.

为了研究$T_r^m(Z)$的形状，我们首先将Z的形心平移到原点，因而$a_0=0$. 然后将每一象扩大一个常数因子. 即用算子$\hat{T}_r=(1/|\lambda_1|)T_r$代替$T_r$. 设$Z=a_1W_1+\cdots+a_{n-1}W_{n-1}$，其中$a_1,a_{n-1}$不全为0. 由引理1知，对充分大的$m$有

$$\hat{T}_r^m(Z)=\alpha^m a_1W_1+\overline{\alpha}^m a_{n-1}\overline{W}_1+(\text{非常小的分量}),$$

这里$\alpha=\lambda_1/|\lambda_1|$是模为1的复数，因而$\hat{T}_r^m(Z)$非常接近于$bW_1+c\overline{W}_1$类型的$n$边形.

设U是一个n边形，如果它是正n边形W_p的仿射象，则称U是p-仿射正n边形.

引理3 设U是一个形心在原点的n边形，则U是p-仿射正n边形的充要条件是$U=bW_p+c\overline{W}_p, b,c\in\mathbf{C}$. 在这种情形下，$U$是内接于椭圆$f(t)=be^{it}+ce^{-it}$的$n$边形(内接点为$f(2\pi pj/n)$). 这个椭圆是退化的当且仅当$|b|=|c|$.

证明 (参考[BGS],[S],[G]和[FRS].)设$U=(u_0,u_1,\cdots,u_{n-1})^t=bW_p+c\overline{W}_p$，则$u_j=b\zeta^{pj}+c\zeta^{-pj}=f(2\pi pj/n)$. 令$b=b_1+ib_2, c=c_1+ic_2, f(t)=f_1(t)+if_2(t)$，通过计算可知

$$\begin{pmatrix}f_1(t)\\ f_2(t)\end{pmatrix}=M\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix},$$

其中

$$M=\begin{pmatrix}b_1+c_1 & -b_2+c_2\\ b_2+c_2 & b_1-c_1\end{pmatrix}.$$

因而U是W_p在仿射变换M下的象. 反之，如果U是W_p的一个仿射象，则这个仿射变换可以用一个实的2×2矩阵M实现. 将M写成上面的形状，则可求出$b,c\in\mathbf{C}$，使得$U=bW_p+c\overline{W}_p$. 引理中的最后断言成立是因为$|f(t)|$的最小值是

$$||b|-|c||.$$

如果$U=bW_1+c\overline{W}_1$是1-仿射正多边形，且$|b|\neq|c|$，则由上述引理知U一定是凸的. 并且$\hat{T}_r^m(U)=ba^mW_1+c\bar{a}^m\overline{W}_1$也是1-仿射正多边形且它们都内接于相同的椭圆$f(t)$中.

定理2的证明现在变得非常简单了. 设Z为定理中所给定的n边形，令$U=a_1W_1+a_{n-1}\overline{W}_1$. 因为$|a_1|\neq|a_{n-1}|$，故$U$是凸的且内接于一个椭圆$f(t)$中. 由于对充分大的$m$，$\hat{T}_r^m(Z)$非常接近于$\hat{T}_r^m(U)$，因而它一定是凸的.

正如文献中所指出的，定理2的逆没有被充分地讨论.（参考[BGS]，[Cl].）下面我们给出命题4的证明概要，其证明细节及推广留给读者.

命题4 设$Z=\sum a_kW_k$是凸的，则$|a_1|\neq|a_{n-1}|$.

证明概要 假设Z是凸的，且$|a_1|=|a_{n-1}|$，我们可假定$a_0=0$，$n\geqslant4$. 定义$\triangle_j(Z)=\{tz_j+(1-t)z_{j+1};0\leqslant t<1\}$为$Z$的第$j$条边. 则每条通过原点的直线$l$恰与$\{\triangle_j(Z)\}$中的两条边相交. 令$U=a_1W_1+a_{n-1}W_{n-1}$，$V=a_2W_2+\cdots+a_{n-2}W_{n-2}$，因为$|a_1|=|a_{n-1}|$，由引理3知$U$的所有的顶点落在一条直线$l$上.

当$e\in\boldsymbol{C}$充分小时，n边形$Z+eW_2$也是凸的. 选择一个适当的e，将Z用$Z+eW_2$替换，使得$|a_2|\neq|a_{n-2}|$. 然后再用一个适当的$T_r^m(Z)$替换Z，使得V非常接近于2-仿射正n边形$a_2W_2+a_{n-2}W_{n-2}$，则直线l恰与$\{\triangle_j(V)\}$中的4条边相交. 如果必要的话，我们可对e作小小的变动，使得V没有顶点落在l上，另外为了确定起见，将图形作一个旋转使得$l=\boldsymbol{R}$(实轴).

令$V=(v_0,v_1,\cdots,v_{n-1})^t$，假设$v_p,v_{q+1},,v_r,v_{s+1}$落在直线$\boldsymbol{R}$之上，$v_{p+1},v_q,v_{r+1},v_s$落在$\boldsymbol{R}$之下. 因为$z_j=u_j+v_j$，$u_j\in\boldsymbol{R}$，因而直线$\boldsymbol{R}$与$\triangle_p(Z)$，$\triangle_q(Z)$，$\triangle_r(Z)$和$\triangle_s(Z)$相交. 这与$Z$的凸性

相矛盾.

3. 周期性

设 $r\in(0,1)$，Z 为一个 n 边形，如果存在一个正整数 m，使得 $T_r^m(Z)$ 与 Z 相似，则称算子 T_r 在 n 边形 Z 上是周期的，m 是 T_r 在 Z 上的一个周期. 我们将决定周期性产生的代数条件.

引理5 如果 T_r 在 Z 上是周期的，则 Z 对某个 p 是 p-仿射正多边形.

证明 我们可假定 $Z\neq 0$且 Z 的中心在原点. 由于在 $\mathbf{C}$ 上任何固定原点的相似变换可以实现为某一非零数 $\gamma\in\mathbf{C}$ 的乘法，因而对某一 $\gamma\in\mathbf{C}$，$T_r^m(Z)$和 γZ 代表相同的多边形. 即存在一整数 k，使得 $T_r^m(Z)=\gamma H^k Z$. 将 Z 写为 $Z=a_1W_1+\cdots+a_{n-1}W_{n-1}$，则此方程变为 $\sum\lambda_j^m a_jW_j=\sum\gamma\zeta^{jk}a_jW_j$. 因为特征向量 W_j 是线性无关的，因而当 $a_j\neq 0$时，有 $\lambda_j^m=\gamma\zeta^{jk}$. 由此可知，如果 $a_i\neq 0$，$a_j\neq 0$，则有 $|\lambda_j^m|=|\gamma|=|\lambda_i^m|$，因而 $|\lambda_i|=|\lambda_j|$. 由引理1可知必有$1\leqslant p\leqslant n-1$，使 a_p 与 $a_{n-p}\neq 0$，而其余的 a_i 均为零，于是 $Z=a_pW_p+a_{n-p}\overline{W}_p$，再由引理3便得本引理.

假若 p 和 n 有一个公因子，比如说 $p=dp_1$，$n=dn_1$，则一个 p-仿射正 n 边形同时也是一个 p_1-仿射正 n_1边形（重复走 d 次）. 在研究算子 T_r 时，我们可以假定 p 和 n 是互素的. 另外，$n\leqslant 2$时属于退化的情形，也不予考虑.

命题6 设 m,n,p 是固定的正整数，且 p 和 n 是互素的，$1\leqslant p<n/2$，$r\in(0,1)$，则下述断言是等价的：

(1) 对每个 p-仿射正 n 边形 U，$T_r^m(U)$与 U 的边相互平行.

(2) T_r 在每一 p-仿射正 n 边形 U 上具有周期 m.

(3) 对某一非正的 p-仿射正 n 边形 U(U 不退化为一点),$T_r^m(U)$与 U 相似.

(4) 存在某一整数 j,使得 $\alpha_p^m=\pm\zeta^j$,这里 $\alpha_p=\lambda_p/|\lambda_p|$.

证明 首先我们注意和前面一样 $\zeta=\exp(2\pi i/n)$,$\lambda_p=(1-r)+r\zeta^p$. (1)⇒(2)和(2)⇒(3)的证明都是容易的,我们先证明(3)⇒(4). 假设对某一 $U=bW_p+c\overline{W}_p$(b,c 非0),有 $T_r^m(U)$与 U 相似,则由引理5的证明可知存在 $\gamma\in\boldsymbol{C}$ 和整数 k,使得$T_r^m(U)=\gamma H^kU$. 因为 W_p 和 $\overline{W}_p$ 是无关的,且 b,c 非0,因而有 $\lambda_p^m=\gamma\zeta^{pk}$,$\bar{\lambda}_p^m=\gamma\bar{\zeta}^{pk}$. 故 γ 是实数,$\lambda_p^m\in\boldsymbol{R}\zeta^{pk}$,因而 $\alpha_p^m\in\boldsymbol{R}\zeta^{pk}$. 由于 $|\alpha_p|=1$,我们得 $\alpha_p^m=\pm\zeta^{pk}$. (4)⇒(1):因为 p 和 n 是互素的,ζ^p 也是单位的一个 n 次原根. 因而对某一整数 k 有 $\alpha_p^m=\pm\zeta^{pk}$. 再注意前面的证明是可逆的.

注 如果 n 是奇数,(4)中的条件等价于 $\alpha_p^{2mn}=1$. 如果 n 是偶数,则它变为 $\alpha_p^{mn}=1$. 特别,α_p 必是单位的一个根.

因而中点运算 $T_{1/2}$在每个仿射正多边形上是周期的(具有周期2). 因为在这种情形,$\alpha_p=\exp(p\pi i/n)$,$\alpha_p^{2n}=1$. 事实上,如果 n 是奇数,则其最小周期是1.

现在可以回答在引言中提出的问题1:给定 $m\geqslant 1$,存在值 $r\in(0,1)$,使得 T_r 在三角形上具有最小周期 m. 更一般地,给定 m,n,p,则存在 $r\in(0,1)$使得 T_r 在 p-仿射正 n 边形上具有最小周期 m. 我们只需选择 $\alpha\in\boldsymbol{C}$,使得 $\alpha^m=\pm\zeta^j$,并且指数小于 m 时这样的方程不成立. 例如:若 n 是偶数,令 $\alpha=\exp(2\pi i/mn)$,若 n 是奇数,令 $\alpha=\exp(\pi i/mn)$,则有 $\alpha^m=\exp(\pi i/n)=-\zeta^{(n+1)/2}$. 有了这样一个 α,我们就可以求出所需要的 $r\in(0,$

1). 下面的引理给出了$0<r<\frac{1}{2}$情形时的计算公式.

引理7 设 $\omega=\exp(i\varphi)$, $0<\varphi<\Pi$, $\lambda=(1-r)+r\omega$, 其中 $0<r<\frac{1}{2}$. 如果 $\alpha=\lambda/|\lambda|=\exp(i\theta)$, 则

$$r=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}-\theta\right)}{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}\right).$$

证明 见图5. 令 $\mu=\frac{1}{2}(1+\omega)$是线段$\overline{\beta\omega}$的中点. 注意 λ 是$\overline{\beta\omega}$的 r 分点. 从直角三角形$\triangle O\mu\lambda$ 和$\triangle O\mu\beta$ 我们可得 $\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}-\theta\right)=|\mu-\lambda|/|\mu|$, $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=|\mu-1|/|\mu|$. 而 $r=|1-\lambda|/|1-\omega|=(|1-\mu|-|\mu-\lambda|)/(2|1-\mu|)=\frac{1}{2}(1-|\mu-\lambda|/|\mu-1|)$. 因而引理成立.

例如, 为了求得一个值 r, 使得 T_r 在所有的三角形上具有周期3, 我们选择 $\alpha=\exp(\pi i/9)$. 应用引理7($\varphi=2\pi/3$, $\theta=\pi/9$)计算得 $r\approx 0.25777$, 此时的图形见图6.

比周期性更一般的便是终极周期性的概念. 算子 T_r 被称为在 n 边形 Z 上是终极周期的(周期为 m), 如果当 j 趋于无穷大时, $T_r^{mj}(Z)$趋于一个极限形状, 更明确地说(假设 Z 不退化为一点), 即存在相似于 $T_r^{mj}(Z)$的 n 边形 Y_j, 满足 $\lim_{j\to\infty}Y_j=Y$, 且 Y 不退化为一点. 毋容置疑, 算子 T_r 在 Z 上的终极周期性与其在展开式 $Z=\sum a_kW_k$ 中的"主项"上的周期性相关.

命题8 设 $Z=a_pW_p+a_{p+1}W_{p+1}+\cdots+a_{n-p}W_{n-p}$, 其中 a_p, a_{n-p}非0. 令 $\hat{T}_r=(1/|\lambda_p|)T_r$, 则下述断言是等价的:

(1) T_r 在 Z 上是终极周期的(周期为 m).

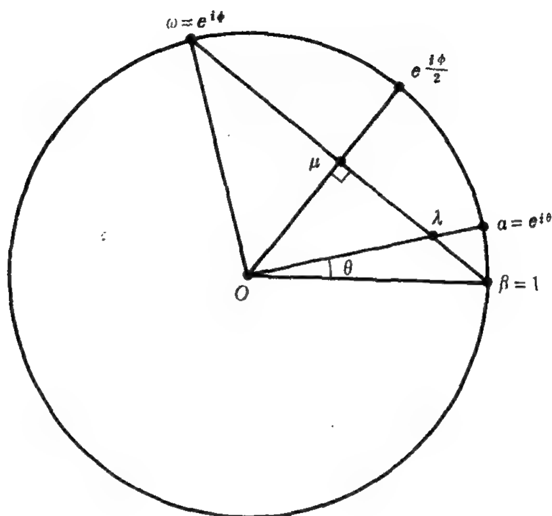


图 5

(2) $\hat{T}_r^{mj}(Z)$趋于一个极限 n 边形(当 $j\to\infty$时).

(3) T_r 在每个 p-仿射正 n 边形上是周期的(周期为 m).

证明概要 (2)⇒(1)由定义即得.

(3)⇒(2) 将 Z 写为 $Z=U+V$,其中 $U=a_pW_p+a_{n-p}W_{n-p}$. 和命题6的证明一样,我们有 $\hat{T}_r^m(U)=\varepsilon\Pi^kU$,其中 $\varepsilon=\pm1(\varepsilon=\lambda/|\lambda_p|^m)$,$k$ 为某一整数. 另外,易知当 $l\to\infty$时,$\hat{T}_r^l(V)\to0$. 因而我们可知 $\hat{T}_r^{mj}(Z)$趋于极限形状 n 边形 U.

(1)⇒(3) 为了方便起见,记 $f=\hat{T}_r^m$. 对每一 $j=1,2,3,\cdots$,我们有形心在原点的 n 边形 Y_j,Y_j 相似于 $f^j(Z)$,且 $\lim\limits_{j\to\infty}Y_j$

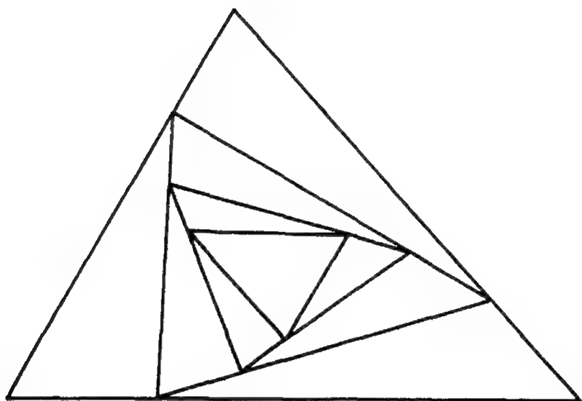


图 6　$r\approx 0.258$

$=Y, Y\neq 0$. 令 $Y_j=\sum b_k^{(j)}W_k, Y=\sum b_kW_k$ 这里 k 的求和范围是 $p\leqslant k\leqslant n-p$. 因而 $b_k=\lim b_k^{(j)}$. 因为 $f(Y_j)$ 相似于 Y_{j+1}，易证 $f(Y)$ 相似于 Y（留给读者）. 如果我们能证明 Y 是 p-仿射正多边形，但 Y 是非正的，则应用命题6便完成了证明，由引理5知 Y 一定是 q-仿射正的（对某一 q），因而剩下的只需证明：$b_p\neq 0, b_{n-p}\neq 0$.

我们知 $f(W_k)=\tau_kW_k$，其中 $\tau_k=(\lambda_k/|\lambda_p|)^m$. 因而对 $p\leqslant k\leqslant n-p$，$|\tau_k|\leqslant 1$，且等号成立当且仅当 $k=p$ 或 $n-p$. 因 Y_j 相似于 $f^j(Z)$，则有 $Y_j=\gamma_j\Pi^{l_j}f^j(Z)$（对某一 $\gamma_j\in\mathbf{C}, l_j\in\mathbf{Z}$）. 比较 W_k 的系数可得：$b_k^{(j)}=\gamma_j\zeta^{kl_j}\tau_k^ja_k$. 因而对每一 j,k，$|b_k^{(j)}|\leqslant|\gamma_ja_k|$，等号当 $k=p$ 或 $n-p$ 时成立. 现在 $|b_p|=\lim|b_p^{(j)}|=\lim|\gamma_ja_p|$，因而 $\lim|\gamma_j|=\gamma$ 存在. 如果 $\gamma=0$，则对每一 k，$|b_k|=\lim|b_k^{(j)}|\leqslant\gamma|a_k|=0$，这样与 $Y\neq 0$ 的假设矛盾. 故 $\gamma\neq 0$，因而 $|b_p|=\gamma|a_p|\neq 0$. 类似地可知 $b_{n-p}\neq 0$.

满足 $a_1=a_{n-1}=0$的 n 边形 $Z=\sum a_k W_k$ 的集合构成 C^n 的一个余维2的子空间. 因而几乎所有的 n 边形 Z 具有 $a_1\neq 0$, $a_{n-1}\neq 0$. 这样,由命题8知:T_r 在几乎所有的 n 边形 Z 上是终极周期的充要条件是 T_r 在1-仿射正 n 边形上是周期的. T_r 在所有的 n 边形上是终极周期的充要条件是对每个 $p=1,2,\cdots$, T_r 在 p-仿射正 n 边形上是周期的.

在命题6之后已指出,中点运算 $T_{1/2}$具有这种很强的性质. 中点运算在所有的 n 边形上的终极周期性是由许多作者独立发现的,包括[Ca][BGS]和[Cl]. 并且在[FRS]的附录中给出了进一步的注解与参考文献. 其逆问题在下面的命题15中讨论.

4. 有理性问题

在证明引言中叙述的主要定理之前,我们先叙述数论中的两个引理.

引理9 设 ζ 是单位的一个根,则在域 $\mathbf{Q}(\zeta)$中单位的根仅是元素 $\pm\zeta^j$, j 为整数.

其证明主要是用到域的有限乘法子群是循环群的事实. 细节可参见[We, p. 267].

引理10 设 n 是正整数,如果 $\cos(\pi/n)$是有理数,则 $n=1,2,3$.

H. W. Richmond 给出了此引理的一个巧妙的初等证明(见[Co, p. 443]).

主要定理(i)⇒(iii)的证明 如同在命题8之后指出的一样,假设(i)即 T_r 在所有1-仿射正 n 边形上是周期的(周期为 m),和以前一样,令 $\zeta=\exp(2\pi i/n)$, $\lambda_1=(1-r)+r\zeta$, $a_1=\lambda_1/$

$|\lambda_1|$. 由命题6知，α_1是单位的一个根，因 $\alpha_1^2 = \lambda_1/\bar{\lambda}_1$，故 $\alpha_1^2 \in \mathbf{Q}(\zeta)$. 因而由引理9知 $\alpha_1^2 = \pm\zeta^k$(对某一 k)，在图5中令 $\omega = \zeta$. 由 r 和$1-r$ 间的对称性，我们可假定$0<r<\frac{1}{2}$. 则 α_1落在1和 $\exp(\pi i/n)$之间，α_1^2落在1和 ζ 之间. 但是能落在1和 ζ 间的$\pm\zeta^j$仅有一 $\zeta^{(n+1)/2} = \exp(\pi i/n)$，$n$ 为奇数. 因而 n 是奇数，$\alpha_1 = \exp(\pi i/(2n))$.

现在我们应用引理7($\varphi = 2\pi/n, \theta = \pi/2n$)，求得

$$r = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}\right).$$

因为 $1 - \frac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}2\theta} = \frac{1}{1+\cos 2\theta}$，因而 $\cos(\pi/n) = -1 + 1/2r$ 是一个有理数，由于已假定 $n \geqslant 3$. 由引理10得 $n=3$. 在此情形下，$r = 1/3$.

我们可以利用伽罗瓦(Galois)理论加强上面证明的结果.

定理11 假设 n, p 是互素的整数，$1 \leqslant p < n/2$，$r \in (0,1)$是一有理数，则算子 T_r 在 p-仿射正 n 边形上是周期的当且仅当 $r = 1/2$或 $n=3, p=1$且 $r = 1/3, 2/3$.

证明 假定 T_r 在 p-仿射正 n 边形上具有周期 m，$\alpha_p = \lambda_p/|\lambda_p|$，其中 $\lambda_p = (1-r) + r\zeta^p$. 我们知道 $\alpha_p^2 = \lambda_p/\bar{\lambda}_p \in \mathbf{Q}(\zeta)$. 由命题6知 α_p 是单位的一个根. 则 $K = \mathbf{Q}(\zeta, \alpha_p)$是一个割圆域(cyclotomic field). 因 n, p 是互素的，则存在一个自同构 $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$，满足 $\sigma(\zeta^p) = \zeta$，因而 $\sigma(\lambda_p) = \lambda_1$. 复共轭诱导出 $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$的一个元素，它与 σ 可交换，并有 $\alpha_1^2 = \lambda_1/\bar{\lambda}_1 = \sigma(\lambda_p/\bar{\lambda}_p) = \sigma(\alpha_p^2)$，则 $\alpha_1 = \pm\sigma(\alpha_p)$也是单位的一个根. 利用上面证明的主要定理的(i)⇒(iii)，可知结论成立.

主要定理(ii)⇒(iii)的证明 设给定一个有理数 $r\in(0,1)$,使得 T_r 在 Z 上是周期的,其中 Z 是一个非退化、非正 n 边形. 由引理5知,Z 是 p-仿射正的(对某一 p,$1\leqslant p<n/2$). 因 Z 是非退化的,因而 n 和 p 必是互素的. 又由于 Z 是非正的,由命题6知 T_r 在每一 p-仿射正 n 边形上是周期的. 由定理11即知结论成立.

推论12 设 α 和 ω 是 $\mathbf{C}$ 中单位的根,且 $0<\arg(\alpha)<\arg(\omega)<\pi$,$\lambda$ 是线段 $\overline{\beta\omega}$ 和 $\overline{O\alpha}$ 的交点,如果 λ 有理地划分线段 $\overline{\beta\omega}$(即 $\overline{\beta\lambda}$ 与 $\overline{\lambda\omega}$ 的长度之比为有理数),则或者 λ 是线段 $\overline{\beta\omega}$ 的中点,或者 $\omega=\exp(2\pi i/3)$,$\alpha=\exp(\pi i/6)$,$\exp(\pi i/2)$.

证明 (见图5)设 ω 是单位的一个 n 次原根,令 $\omega=\zeta^p$,其中 $\zeta=\exp(2\pi i/n)$,则 $1\leqslant p<\frac{n}{2}$ 且 p 和 n 是互素的. 由定理11的证明知:或者 $r=\frac{1}{2}$ 且 λ 是 $\overline{\beta\omega}$ 的中点;或者 $n=3$,$p=1$,且 $r=\frac{1}{3},\frac{2}{3}$,此时则有 $\omega=\zeta=\exp(2\pi i/3)$,$\alpha=\exp(\pi i/6)$,$\exp(\pi i/2)$.

推论13 设 a,b 是有理数,$0<a<b<\frac{1}{2}$,则

(1) $\operatorname{tg}(a\pi)/\operatorname{tg}(b\pi)$ 是有理数当且仅当 $a=\frac{1}{6}$,$b=\frac{1}{3}$.

(2) $\operatorname{tg}(a\pi)\cdot\operatorname{tg}(b\pi)$ 是有理数当且仅当 $a+b=\frac{1}{2}$.

证明 (1)令 $\omega=\exp(2b\pi i)$,$\alpha=\exp((b-a)\pi i)$,并定义 λ 和 r,使得 $\lambda=(1-r)+r\omega$,$\alpha=\lambda/|\lambda|$. 如果 $\operatorname{tg}(a\pi)/\operatorname{tg}(b\pi)$ 是有理数,则引理7说 r 是有理数,因而由推论12即得所要的结果. (2)可以由(1)推出,因为恒等式 $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=1/tg\varphi$ 成立.

注记14 上面的有理性结果也可以由 Conway 和 Jones 的一个定理得到. 假定 n,p,r 为通常意义所给定的数值,如果 T_r 在 p-仿射正 n 边形上是周期的,由命题6知 α 是单位的一个根,其中 $\alpha=\lambda/|\lambda|$, $\lambda=(1-r)+r\zeta^p$,则 $\alpha^2\bar{\lambda}=\lambda$,因而可求得

$$(1-r)\alpha^2+r\alpha^2\zeta^{-p}-(1-r)-r\zeta^p=0.$$

除了熟知的情形 $r=\frac{1}{2}$ 或 $n=3, r=\frac{1}{3},\frac{2}{3}$ 外,单位的这4个根(及它们的负的)是互异的. 如果 r 是有理数,则由[CJ]的定理6知其他的情形全可排除. 因而定理11成立. 类似的技巧可以用来证明下面的结果.

命题15 假设 $n\geqslant 5$, $r\in(0,1)$ 已给定,则 T_r 在每一个 n 边形上是终极周期的当且仅当 $r=\frac{1}{2}$.

证明概要 在命题的假设之下,T_r 在每一 p-仿射正 n 边形上是周期的,$p=1,2,\cdots$. 由命题6知 α_p 是单位的一个根,使得 $\alpha_p^2=((1-r)+r\zeta^p)/((1-r)+r\zeta^{-p})$ 是单位的一个根(对每一个 p). 对 $p=1$ 和2从这个方程解出 r,使结果相等并化简,结果可得单位的8个根的一个为0的和式. 如果 $r\neq\frac{1}{2}$,这些根(及其负的)是互异的,因而可利用[CJ]的定理6.

注记16 最后我们给出两点注记作为本文的结束,它们可看成是上述讨论的进一步推广.

(1) 去掉 $0<r<1$ 的限制,即当 $r>1$ 或 $r<0$ 时,我们也可考虑算子 T_r. 这样推广的定理11进一步包含一种情形:T_2 和 T_{-1} 在1-仿射正六边形上是周期的(周期为2). (见图7,最里面的六边形是 Z.)

(2) 如果 $r,s\in(0,1)$,在什么情形下对所有三角形 Z,

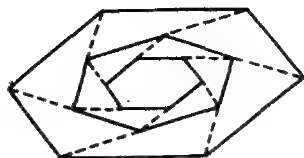


图 7　T_2作用在1-仿射正六边形上

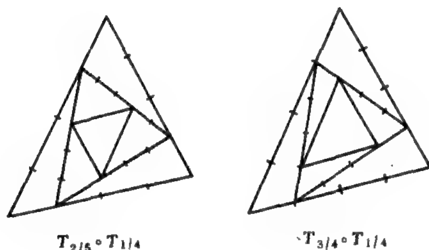


图　8

$T_r \circ T_s(Z)$与 Z 相似?如果 $r+s=1$,这总是成立的. $r=s=\frac{1}{3}$的情形也是我们熟知的. 但这种性质对其他的 r,s 也可能成立,如 $r=\frac{2}{5}, s=\frac{1}{4}$. (见图8.)求出所有这样的 r,s 是一个很好的练习.

参 考 文 献

[BS]　F. Bachmann and E. Schmidt, n-gons, Mathematical Exposition No. 18, transl. by C. W. L. Garner, Univ. of Toronto Press, Toronto,

1975.

[BGS] E. R. Berlekamp, E. N. Gilbert, and F. W. Sinden, A polygon problem, this MONTHLY, 72(1965) 233—241. Reprinted in Selected Papers on Algebra, Mathematical Association of America, 1977, pp. 397—405.

[Ca] J. H. Cadwell, Topics in Recreational Mathematics, Cambridge Univ. Press, 1966(Chapter 3).

[Cl] R. J. Clarke, Sequences of polygons, Math. Mag., 52(1979) 102—105.

[CJ] J. H. Conway and A. J. Jones, Trigonometric diophantine equations (On vanishing sums of roots of unity), Acta Arith., 30(1976)229—240.

[Co] H. S. M. Coxeter, Introduction to Geometry, 2nd ed., Wiley, 1969.

[D1] P. J. Davis, Cyclic transformations of polygons and the generalizel inverse, Canad. J. Math, 29(1977)756—770.

[D2] _____, Cyclic transformations of n-gons and related quadratic forms, Linear Algebra and Appl., 25(1979)57—75.

[D3] _____, Circulant Matrices, Wiley, New York, 1979.

[F] L. Fejes Toth, Sequences of polyhedra, this MONTHLY, 88(1981) 145—146.

[FRS] J. C. Fisher, D. Ruoff and J. Shilleto, Polygons and polynomials, in: The Geometric Vein: The Coxeter Festschrift, C. Davis etal, Editors, Springer, 1981, pp. 321—333.

[G] L. Gerber, Napoleon's theorem and the parallelogram inequality for affine-regular polygons, this MONTHLY, 87(1980)644—648.

[K] E. Kasner, The group generated by central symmetries, with applicati ons to polygons, this MONTHLY, 10(1903)57—63. Reprinted in Selected Papers on Algebra, Mathematical Association of America, 1977, pp. 66—71.

[Ne] B. H. Neumann, Some remarks on polygons, *J. London Math. Soc*., 16 (1941)230—245.

[Ni] I. Niven, Irrational Numbers, Carus Monograph no. 11, Mathematical Association of America, 1956.

[S] I. J. Schoenberg, The finite Fourier series and elementary geometry, this MONTHLY, 57(1950)390—404.

[T] Dapeng Tien, A periodicity problem of plane polygons, Master's thesis, The Ohio State University, 1982.

[Wo] E. T. Wong, Polygons, circulant matrices, and Moore-Penrose inverses, this MONTHLY, 88(1981)509—515.

[We] E. Weiss, Algebraic Number Theory, McGraw-Hill, New York, 1963.

（吴传喜译，阮培文校）

含中心二项式系数的有趣级数[①]

D. H. Lehmer

形容词“有趣的”特指如下含义：如果一个级数的第 n 项有一个明显的简单公式同时它的和能表示为一个已知的常数，则称这个级数是有趣的. 例如

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=2,$$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\cdots=\log 2,$$

$$1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\frac{1}{256}+\cdots+\frac{1}{n^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{90},$$

就是大家熟悉的一些有趣级数.

我们打算讨论的两类级数为：

$$\text{I}.\ \sum_{n=0}^{\infty}a_n\binom{2n}{n} \quad \text{和} \quad \text{II}.\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{\binom{2n}{n}},$$

其中 a_n 是关于 n 的非常简单的函数. 我们先讨论型 I 的级数.

根据二项式定理有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}x^n=\frac{1}{\sqrt{1-4x}}, \tag{1}$$

---

① Intersting series involving the central binomial coefficient, *The Amer. Math. Monthly*, 92(1985), 449—57.

当 $|x|<\frac{1}{4}$ 时，这个级数收敛．如果令 $x=1/8$，得到有趣的级数

$$1+\frac{1}{4}+\frac{3}{32}+\frac{5}{128}+\cdots+\frac{\binom{2n}{n}}{8^n}+\cdots=\sqrt{2}. \quad (2)$$

如果 $x=1/10$，我们得到

$$1+0.2+0.06+0.02+0.007+\cdots+\frac{\binom{2n}{n}}{10^n}+\cdots=\sqrt{\frac{5}{3}}. \quad (3)$$

令 $x=-1/8$，得

$$1-\frac{1}{4}+\frac{3}{32}-\frac{5}{128}+\cdots+\frac{(-1)^n\binom{2n}{n}}{8^n}+\cdots=\sqrt{\frac{2}{3}}. \quad (4)$$

把(2)与(4)式相加再除以2得出

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\binom{4n}{2n}}{64^n}=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6}.$$

由于幂级数在复数值域中也有意义，因此可用 ix 去代换 x 得到类似于(2)，(4)的式子，最后导出

$$4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\binom{8n}{4n}}{8^{4n}}=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{3}+\frac{2\sqrt{2+\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}$$

或

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\binom{8n}{4n}}{8^{4n}}=\frac{(15\sqrt{2}+5\sqrt{6}+6\sqrt{5}\sqrt{2+\sqrt{5}})}{60}.$$

一般地用 $x=\varepsilon^{\nu}/c(\nu=0,1,2,\cdots,a-1)$ 代入(1),其中 $\varepsilon=\exp(2\pi i/a)$. 并将所得结果进行适当的线性组合可求出

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\binom{2(an+b)}{an+b}}{C^{an+b}}$$

的值,这个过程称为多分部的(multisection,见 Riordan[4]).

讨论型 I 级数的另外途径是对(1)作运算. 如果对(1)式两边从0到 x 积分,得到

$$\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}t^n\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{(1-4t)^{1/2}}.$$

两边除 x 即得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{x^n}{n+1}=\frac{1}{2x}(1-\sqrt{1-4x}). \tag{5}$$

这个级数的系数 C_n 是整数,C_n 称为凯特兰(Catalan)数. 前10个值是

$$1,1,2,5,14,42,132,429,1430,4862,\cdots$$

它们在组合分析里经常出现(见 Gould[2]). 对 $n!$ 利用斯特林公式可得

$$C_n\sim\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}(n+1)}\left(1-\frac{1}{8n}\right).$$

从这里看出当 $x=1/4$时级数(5)的收敛速度如同 $\sum\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ 一样地慢. 由(5)给出有趣的级数

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{5}{64}+\cdots+\frac{\binom{2n}{n}}{4^n(n+1)}+\cdots=2.$$

我们用一个稍微不同的方法处理(1)，把它右边的第一项移项后两边除 x 再积分. 这就给出了广义积分

$$\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\binom{2n}{n}t^{n-1}\mathrm{d}t=\int_0^x\left(\frac{1}{t(1-4t)^{1/2}}-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\binom{2n}{n}x^n=2\log\left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\right). \tag{6}$$

令 $x=1/4$ 得到级数

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{16}+\frac{5}{48}+\frac{35}{512}+\cdots+\frac{\binom{2n}{n}}{n4^n}+\cdots=\log 4.$$

如果我们令 $x=-1/4$ 并改变符号，得到

$$\frac{1}{2}-\frac{3}{16}+\frac{5}{48}-\frac{35}{512}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}\binom{2n}{n}}{n4^n}+\cdots$$

$$=\log\left[\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right]^2.$$

将这两个级数相加或相减可导出两个有趣级数

$$\sum_{\substack{n\text{为奇数}\\ n>0}}\binom{2n}{n}\frac{1}{n4^n}$$

或

$$\sum_{\substack{n\text{为偶数}\\ n>0}}\binom{2n}{n}\frac{1}{n4^n}$$

的和.

我们对(6)式积分得到

$$x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{n(n+1)}x^n = 2x\log\frac{1-\sqrt{1-4x}}{x}$$
$$+\frac{\sqrt{1-4x}}{2} - x(\log 4 - 1) - \frac{1}{2}. \qquad (7)$$

如果代入 $x=1/4$,得到有趣级数

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{5}{192}+\frac{7}{512}$$
$$+\cdots+\frac{\binom{2n}{n}}{n(n+1)4^n}+\cdots = \log 4 - 1.$$

通过对(1)式的反复积分能够得到许多这类例子.

另一类运算是微分.设 θ 是算子

$$\theta = x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x},$$

如果我们用 θ 去作用(1)式得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\binom{2n}{n}x^n = \theta\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}}\right) = 2x(1-4x)^{-3/2}. \qquad (8)$$

如果令 $x=1/8$,得到

$$\frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\frac{15}{125}+\frac{35}{512}+\cdots+\frac{n\binom{2n}{n}}{8^n}+\cdots = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

用 θ 再作用一次(8)式得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\binom{2n}{n}x^n = \theta^2((1-4x)^{-1/2}) = \frac{2x(2x+1)}{(1-4x)^{5/2}}.$$

令 $x=1/8$，我们得

$$\frac{1}{4}+\frac{3}{8}+\frac{45}{128}+\frac{35}{128}+\frac{1575}{8192}+\cdots+\frac{n^2\binom{2n}{n}}{8^n}+\cdots=\frac{5\sqrt{2}}{4}.$$

如果在(1)式中把 x 换成 x^2然后两边积分，得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{(2n+1)}x^{2n}=\frac{1}{2x}(\arcsin 2x)$$

并且取 $x=1/4$有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{(2n+1)16^n}=\frac{\pi}{3}.$$

现在我们讨论Ⅱ型的级数，这类级数的分母为二项式系数的中项. 这些级数更奥妙并且不为人们所熟悉. 在关于$\zeta(3)$无理性的 Apery 证明的非正式讨论中，A. J. Van der Poorten [5]谈到4个Ⅱ型的级数. 他引用了下面的定理并指出由 Z. A. Melzak[3]所给出的这个定理的证明是“不十分妥当的”. 下面我们给出一个完全不同的证明.

定理 如果$|x|<1$，则

$$\frac{2x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2x)^{2m}}{m\binom{2m}{m}}. \tag{9}$$

证明 利用熟悉的格雷果里级数

$$t \cdot \operatorname{arc\,tg} t = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} t^{2m}}{2m-1} \tag{10}$$

并且令 $t = x/\sqrt{1-x^2}$，因此 $\operatorname{arc\,tg} t = \arcsin x$. 那么(10)变为

$$\begin{aligned}
\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} x^{2m}}{(2m-1)(1-x^2)^m} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{2m-1} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j x^{2(j+m)} \binom{-m}{j} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{2m-1} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{m+j-1}{j} x^{2(j+m)} \\
&= \sum_{r=1}^{\infty} x^{2r} \sum_{m=1}^{r} \frac{(-1)^{m-1}(r-1)!}{(m-1)!(r-m)!(2m-1)}.
\end{aligned}$$

只要证明 x^{2r} 的系数是(9)式右边系数的一半就行了. 即证，

$$r\binom{2r}{r} \sum_{v=0}^{r-1} \frac{(-1)^v (r-1)!}{v!(r-v-1)!(2v+1)} = 2^{2r-1}. \tag{11}$$

为了证明这点我们利用瓦理斯积分

$$\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2r-1} d\theta = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2r-2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2r-1)}.$$

注意(11)式的左边用代换 $y = \cos\theta$ 可写为

$$\begin{aligned}
& r\binom{2r}{r} \sum_{v=0}^{r-1} (-1)^v \binom{r-1}{v} \frac{1}{2v+1} \\
&= r\binom{2r}{r} \int_0^1 \sum_{v=0}^{r-1} (-1)^v \binom{r-1}{v} y^{2v} dy \\
&= r\binom{2r}{r} \int_0^1 (1-y^2)^{r-1} dy \\
&= r\binom{2r}{r} \int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2r-1} d\theta.
\end{aligned}$$

利用瓦理斯积分得知

$$r\binom{2r}{r}\frac{2^{2r-2}(r-1)!(r-1)!}{(2r-1)!}=2^{2r-1}$$

这就证明了(11)式并且定理得证.

在(9)式中如果代入 $x=1/2$，得到(Van der Poorten[5], p. 202)

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m\binom{2m}{m}}=\frac{\pi\sqrt{3}}{9}, \tag{12}$$

这是类型 Ⅱ 的第一个有趣级数. 如果在(9)中令 $x=i/2$并改变符号这就给出

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m\binom{2m}{m}}=2\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\Big/\sqrt{5}.$$

如果我们在(9)式两边除以$2x$ 然后积分，得到

$$2(\arcsin x)^2=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2x)^{2m}}{m^2\binom{2m}{m}}. \tag{13}$$

从上式取 $x=1/2$得到

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2\binom{2m}{m}}=\frac{\pi^2}{18}=\frac{1}{3}\zeta(2), \tag{14}$$

其中 $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}, s>1$，是 Riemann zeta 函数. 同样，

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m^2\binom{2m}{m}}=2\left\{\log\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\right\}^2.$$

如果在(13)式两边除以$2x$并且积分，得到

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2x)^{2m}}{m^3\binom{2m}{m}}=4\int_0^x\frac{(\arcsin y)^2}{y}\mathrm{d}y.$$

这是一个“比较高级的超越积分”. 它与 Spence 超越，Clausen 积分以及 trigamma 函数紧密相连. 取$x=1/2$得到

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^3\binom{2m}{m}}&=4\int_0^{\frac{1}{2}}(\arcsin y)^2\frac{\mathrm{d}y}{y}\\&=-2\int_0^{\pi/3}x\log\left(2\sin\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x\\&=-\frac{\zeta(3)}{3}-\frac{\pi\sqrt{3}}{72}\left\{\psi\left(\frac{1}{3}\right)-\psi\left(\frac{2}{3}\right)\right\},\end{aligned}$$

其中$\psi(x)$是三γ函数，即$\psi(x)=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(\log\Gamma(x))$. Van der Poorten[6]拒绝这种非启发性的计算. 然而，如同 Comtet 的值得注意的级数(见[1])

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^4\binom{2m}{m}}=\frac{17\pi^4}{3240}$$

一样，他也给出有趣的级数

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{48}+\frac{1}{540}-\frac{1}{4480}+\cdots+\frac{(-1)^{m-1}}{m^3\binom{2m}{m}}+\cdots=\frac{2}{5}\zeta(3).$$

$k>4$时，有趣级数$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^k\binom{2m}{m}}$的值现在还不知道.

如果把算子 θ^k 作用于(9)式两边，可得到无数个有趣级数的例子.

用 θ 作用(9)式我们得到

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2x)^{2m}}{\binom{2m}{m}}=\frac{x^2}{1-x^2}+\frac{x\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}. \tag{15}$$

从上式得到，

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{20}+\frac{1}{70}+\cdots+\frac{1}{\binom{2n}{n}}+\cdots=\frac{9+2\pi\sqrt{3}}{27}.$$

在(15)式中用 ix 代换 x 并且令 $x=a/b$，我们得到(15)式的另一种形式

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}(2a/b)^{2m}}{\binom{2m}{m}}=\frac{ab^2}{h^3}\left[\log\left(\frac{a+h}{b}\right)+\frac{ah}{b^2}\right],$$

其中 $h=\sqrt{a^2+b^2}$. 例如，如果 $a=1, b=2, h=\sqrt{5}$，得到

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{20}-\frac{1}{70}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{\binom{2n}{n}}+\cdots$$

$$=\frac{1}{5}+\frac{4\sqrt{5}}{25}\log\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

对 $a=23660, b=23661$，我们有 $h=33461$并得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\left(\frac{23660}{23661}\right)^{2n}4^n}{\binom{2n}{n}}$$

$$= \frac{23660}{(33461)^2}\left[23660 + \frac{(23661)^2}{33461}\log\frac{57121}{23661}\right]$$

$$= 0.811587506\cdots$$

当然这个级数是收敛的. 如果人们检验相邻两项的比就会发现一直到 $n=11830$ 各项的绝对值都是增加的. 项的值可达到 117, 从那以后减少到 0, 好在对这个和我们有自己的公式.

如果把 θ 的更高次幂作用在(9)式上, 我们得到级数

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^{k-2}(2x)^{2m}}{\binom{2m}{m}} \quad (k \geqslant 0) \tag{16}$$

并且其和作为 k 的函数依赖于两个多项式序列 $V_k(t)$ 和 $W_k(t)$. $V_k(t)$, $W_k(t)$ 递归定义为:

$$V_1(t) = 1, \quad W_1(t) = 0,$$

$$V_{k+1}(t) = \{(2k-2)t+1\}V_k(t) + 2(1-t)\theta V_k(t), \tag{17}$$

$$W_{k+1}(t) = \{(2k-4)t+2\}W_k(t) + 2(1-t)\theta W_k(t) + V_k(t). \tag{18}$$

前几个多项式是

$V_2=1$, $W_2=1$,

$V_3=1+2t$, $W_3=3$,

$V_4=1+10t+4t^2$, $W_4=7+8t$,

$V_5=1+36t+60t^2+8t^3$, $W_5=15+70t+20t^2$.

利用 V_k 和 W_k 可以明确地给出级数(16)的和为

$$\frac{x}{2^{k-2}(1-x^2)^{k-1/2}}\left[\arcsin x V_k(x^2) + x\sqrt{1-x^2}W_k(x^2)\right].$$

如果我们用 θ 对上式作运算并且整理 $\arcsin x$ 和 $x\sqrt{1-x^2}$ 的

系数,就得到(17)和(18)式.替换 $x=\sin\theta$,这个结果的三角形式为

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^{k-2}4^m(\sin\theta)^{2m}}{\binom{2m}{m}}=\frac{\sin2\theta}{(2\cos^2\theta)^k}[2\theta V_k(\sin^2\theta)+\sin2\theta W_k(\sin^2\theta)].$$

如果用 ix 代换 x 我们得到交错级数

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}m^{k-2}4^m(\sinh z)^{2m}}{\binom{2m}{m}}$$

$$=\frac{\sinh2z}{(2\cosh^2z)^k}[2\log\{\sinh z+\cosh z\}\times V_k(-\sinh^2z)$$

$$+\sinh2zW_k(-\sinh^2z)].$$

带有参数 θ 和 z 的这两个公式产生种种有趣的级数,作为例子,我们仅罗列如下,其中求和都是从1加到∞.

$$\sum\frac{m}{\binom{2m}{m}}=\frac{2}{27}(\pi\sqrt{3}+9),$$

$$\sum\frac{m^2}{\binom{2m}{m}}=\frac{2}{81}\{5\pi\sqrt{3}+54\},$$

$$\sum\frac{m^3}{\binom{2m}{m}}=\frac{2}{243}\{37\pi\sqrt{3}+405\},$$

$$\sum\frac{(-1)^{m-1}m}{\binom{2m}{m}}=\frac{2}{125}[2\sigma+15]$$

$$\left(\sigma = \sqrt{5}\log\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.076022352\right),$$

$$\sum \frac{(-1)^{m-1}m^2}{\binom{2m}{m}} = \frac{4}{125}[5-\sigma],$$

$$\sum \frac{(-1)^{m-1}m^3}{\binom{2m}{m}} = \frac{2}{625}[28\sigma+5],$$

$$\sum \frac{2^m}{m^2\binom{2m}{m}} = \frac{\pi^2}{8}, \quad \sum \frac{2^m}{m\binom{2m}{m}} = \frac{\pi}{2},$$

$$\sum \frac{2^m}{\binom{2m}{m}} = \frac{\pi}{2}+1, \quad \sum \frac{m2^m}{\binom{2m}{m}} = \pi+3,$$

$$\sum \frac{m^2 2^m}{\binom{2m}{m}} = \frac{1}{5}\sum \frac{m^3 2^m}{\binom{2m}{m}} = \frac{7\pi}{2}+11,$$

$$\sum \frac{m^4 2^m}{\binom{2m}{m}} = 113\pi+355,$$

$$\sum \frac{m^{10} 2^m}{\binom{2m}{m}} = 229093376\pi+719718067.$$

一般地，

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^k 2^m}{\binom{2m}{m}} = a\pi + b,$$

其中 b/a 是一个接近于 π 的数.

$$\sum \frac{3^m}{m^2\binom{2m}{m}} = \frac{2\pi^2}{9},$$

$$\sum \frac{3^m}{m\binom{2m}{m}} = \frac{2}{3}\pi\sqrt{3} = \gamma = 3.627598728,$$

$$\sum \frac{3^m}{\binom{2m}{m}} = 2\gamma + 3, \quad \sum \frac{m3^m}{\binom{2m}{m}} = 10\gamma + 18,$$

$$\sum \frac{m^2 3^m}{\binom{2m}{m}} = 2(43\gamma + 78), \quad \sum \frac{(-1)^{m-1}2^m}{m\binom{2m}{m}} = \rho/3,$$

其中 $\rho = \sqrt{3}\log(2+\sqrt{3}) = 2.281037989$.

$$\sum \frac{(-1)^{m-1}2^m}{\binom{2m}{m}} = \frac{\rho+3}{9},$$

$$\sum \frac{(-1)^{m-1}m2^m}{\binom{2m}{m}} = \frac{1}{3},$$

$$\sum \frac{(-1)^{m-1} m^2 2^m}{\binom{2m}{m}} = \frac{1}{27}(3-\rho),$$

$$\sum \frac{(-1)^{m} m^2 2^m}{\binom{2m}{m}} = \frac{1}{81}[\rho + 15],$$

$$\sum \frac{(2-\sqrt{2})^m}{\binom{2m}{m}} = \frac{3-2\sqrt{2}}{4}(\pi\sqrt{2}+4),$$

$$\sum \frac{(-1)^{m-1} 3^{2m}}{4^m \binom{2m}{m}} = \frac{48}{125}\left(\log 2 + \frac{15}{16}\right),$$

$$\sum \frac{2^m (2-\sqrt{3})^m}{m^2 \binom{2m}{m}} = \frac{\pi^4}{36} = (\zeta(2))^2.$$

参 考 文 献

[1] Louis Comtet, Advanced Combinatorics. Dreidel. Dordrecht. 1974, p. 89.

[2] H. W. Gould. Bibliography of the Euler-Fuss-Segner-Catalan Sequence, *manuscript containing* 243 *titles.*

[3] Z. A. Melzak. Companion to Concrete Mathematics, vol. 1, Wiley, 1973. p. 108.

[4] John Riordan, Combinatorial Identities, Wiley, 1968, pp. 131—135.

[5] A. J. van der Poorten, A proof that Euler missed, *Math.*, *Intelligencer*,

vol. 1(1979)195—203.

[6] ______, Some wonderful formulas, *Queen's Papers in Pure and Applied Math.*, 54(1979)269—286.

（刘　勇译，朱学贤校）

右导数为零的函数是常数函数①

William J. Knight

本文的目的是建立下面的初等定理.

1. **定理1** 设 f 是定义在区间 I 上的实值连续函数. 如果在 I 的每一个内点上, f 的右导数都存在且等于0, 则 f 在 I 上为常数.

在 W. Feller 的关于概率论的一本较高级的著作[1]的第148页上可以找到这条定理的一个应用. 在建立 Stieltjes 积分的分部积分公式时, Feller 证明了某个函数的右导数是0. 他建议读者去证明左导数也是0, 从而完成函数是常数的证明. 但这看来是非常困难的, 因为积分中的被积函数可能是不连续的. 上面的定理说明这种证明是没有必要的.

为证明定理1, 我们要用到3条引理. 其中的2条是 Roll 定理的较弱的描述, 另外1条是它们的"平均值推论".

2. **引理** 设 f 是定义在闭区间$[a,b]$上的实值连续函数, $f(a)=f(b)=0$. 如果在开区间(a,b)的第一点 x 上, f 有右导数 $f'_+(x)$, 则存在一点 $c\in(a,b)$, 使得 $f'_+(c)\leqslant 0$.

证明 设对于(a,b)中的每一点 x, $f'_+(x)$存在. 如果 f 是

---

① Functions with zero right derivatives are constant, *The Amer. Math. Monthly*, 87(1980), 657—58.

常数函数，则引理显然成立. 从而假定 f 不恒为0. 因为 f 连续，所以 f 或者取正的最大值，或者取负的最小值.

情形1 如果 f 有正的最大值，设在 (a,b) 中的某点 c 上取到. 当 $c<x\leqslant b$ 时，有 $(f(x)-f(c))/(x-c)\leqslant 0$，所以令 x 从右面趋近于 c，取极限得 $f'_+(c)\leqslant 0$.

情形2 如果 f 有负的最小值，设在 (a,b) 中的某点 q 上取到. 现在我们来看 $f'_+(x)$，$a<x<q$. 如果对于任意 $x\in(a,q)$ 有 $f'_+(x)<0$，则引理成立. 如果不是的话，则存在点 $p\in(a,q)$ 使 $f'_+(p)>0$. 从而，对于在右面充分靠近 p 的所有 x，有 $(f(x)-f(p))/(x-p)>0$，由此我们得到 $f(x)>f(p)$. 设 M 表示 f 在 $[p,q]$ 上的最大值. 显然有 $M>f(p)\geqslant f(q)$，从而假定值 M 在 $[p,q]$ 的某个内点 c 上取到. 现在，由情形1中的论述证得 $f'_+(c)\leqslant 0$. 引理证得.

3. 引理 设 f 在 $[a,b]$ 上连续，$f(a)=f(b)=0$. 如果 f 在 (a,b) 的每一点上都有右导数，则存在 (a,b) 上的一点 d，使得 $f'_+(d)\geqslant 0$.

证明 将引理2应用于 $-f$ 可得.

4. 推论 设 f 在 $[a,b]$ 上连续. 如果在 (a,b) 的每一点上 f 有右导数，则存在 (a,b) 中的点 c 和 d，使得

$$f'_+(c)\leqslant\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leqslant f'_+(d).$$

证明 将引理2和引理3应用于函数

$$g(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

即可得证明.

定理1的证明 在给定的区间 I 上，取任意两点 a 和 b，满

足条件 $a<b$. 在$[a,b]$上应用推论4于函数 f. 因为在(a,b)上有 $f'_+(x)\equiv 0$,所以我们得到 $f(b)=f(a)$. 这充分证明了 f 是常数函数.

后记 引起作者注意的是,定理1是一个更普遍的结论的推论,此结论是说,如果 f 的4个 Dini 导数中的任意一个在区间 I 上除了一个可数集外都等于0,则 f 在 I 上是常数[2,pp. 365,382—383]. 这一结果看来并不广为人知,下面参考文献中 Feller 的著作恰好说明了这一点.

参 考 文 献

[1] W. Feller, Introduction to Probability Theory and Its applications, vol. 2, 1st ed., Wiley, New York, 1966.

[2] E. W. Hobson, The Theory of Functions of a Real Variable…, vol. 1, 3rd ed., Cambridge University Press, 1927.

(朱学贤译, 潘承彪校)

级数的求和[①]

G. Klambauer

这篇短文的意图是用初等方法去求一些有意思的无穷级数的和.

Ⅰ. 设 f 和 g 是变量 x 的函数,满足条件

$$f(x)=af(bx)+cg(x),$$

其中的 a,b,c 都是已知的常数. 则对于任意正整数 k,有

$$a^{k-1}f(b^{k-1}x)=a^kf(b^kx)+a^{k-1}cg(b^{k-1}x).$$

关于 k,$1\leqslant k\leqslant n$,求和得

$$f(x)=a^nf(b^nx)+c[g(x)+ag(bx)+\cdots+a^{n-1}g(b^{n-1}x)].$$

如果 $c\neq0$及当 $n\to\infty$时 $a^nf(b^nx)$的极限是 L,我们得到

$$g(x)+ag(bx)+a^2g(b^2x)+\cdots=\frac{f(x)-L}{c}.$$

类似地,对于任意非负整数 k,有

$$\frac{1}{a^k}f\left(\frac{x}{b^k}\right)=\frac{1}{a^{k-1}}f\left(\frac{x}{b^{k-1}}\right)+\frac{c}{a^k}g\left(\frac{x}{b^k}\right),$$

其中 $a\neq0,b\neq0$. 关于 k,$0\leqslant k\leqslant n$,求和得

$$af(bx)=\frac{1}{a^n}f\left(\frac{x}{b^n}\right)-c\left[g(x)+\frac{1}{a}g\left(\frac{x}{b}\right)+\cdots+\frac{1}{a^n}g\left(\frac{x}{b^n}\right)\right].$$

---

① Summation of series, *The Amer. Math. Monthly*, 87(1980), 128－130.

因此，如果 $c\neq 0$ 及当 $n\to\infty$ 时 $\frac{1}{a^n}f\left(\frac{x}{b^n}\right)$ 收敛到 M，我们有

$$g(x)+\frac{1}{a}g\left(\frac{x}{b}\right)+\frac{1}{a^2}g\left(\frac{x}{b^2}\right)+\cdots=\frac{M-af(bx)}{c}.$$

应用举例

1. 考虑等式

$$\sin x=3\sin\frac{1}{3}x-4\sin^3\frac{1}{3}x,$$

取 $f(x)=\sin x, g(x)=\sin^3\frac{1}{3}x, a=3, b=\frac{1}{3}$ 及 $c=-4$. 有

$$L=\lim_{n\to\infty}\left[3^n\sin\left(\frac{x}{3^n}\right)\right]=x,\quad M=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(3^n x)}{3^n}=0,$$

因此，

$$\sin^3\frac{x}{3}+3\sin^3\frac{x}{3^2}+3^2\sin^3\frac{x}{3^3}+\cdots=\frac{x-\sin x}{4}$$

及

$$\sin^3 x+\frac{1}{3}\sin^3 3x+\frac{1}{3^2}\sin^3 3^2x+\cdots=\frac{3}{4}\sin x.$$

2. 同样地，由等式

$$\cos x=-3\cos\frac{x}{3}+4\cos^3\frac{x}{3}$$

很容易证明

$$\cos^3 x-\frac{1}{3}\cos^3 3x+\frac{1}{3^2}\cos^3 3^2x-\frac{1}{3^3}\cos^3 3^3x+\cdots=\frac{3}{4}\cos x;$$

另外，由等式

$$\operatorname{ctg}x=2\operatorname{ctg}2x+\operatorname{tg}x,$$

我们毫无困难地推得

$$\operatorname{tg}x+\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2^2}\operatorname{tg}\frac{x}{2^2}+\cdots=\frac{1}{x}-\frac{2}{\operatorname{tg}2x}.$$

Ⅱ. 容易看到

$$\frac{a_1-1}{a_1}+\frac{a_2-1}{a_1a_2}+\frac{a_3-1}{a_1a_2a_3}+\cdots+\frac{a_n-1}{a_1a_2\cdots a_n}=1-\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n},$$

只要其中的 $a_i, i=1,2,\cdots$,都不是0. 因此,如果 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1a_2\cdots a_n)$ 存在且等于 $L, L\neq 0$,则

$$\frac{a_1-1}{a_1}+\frac{a_2-1}{a_1a_2}+\frac{a_3-1}{a_1a_2a_3}+\cdots=1-\frac{1}{L}.$$

应用举例 考虑级数

$$S=\frac{\frac{1}{2^2}}{1-\frac{1}{2^2}}+\frac{\frac{1}{3^2}}{\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)}+\frac{\frac{1}{4^2}}{\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)}+\cdots.$$

设 $a_1=1, a_n=1-\frac{1}{n^2}, n=2,3,\cdots$,则有

$$\begin{aligned}a_1a_2\cdots a_n&=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\\&=\frac{1\cdot 3}{2^2}\,\frac{2\cdot 4}{3^2}\,\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdots\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)\end{aligned}$$

从而 $L=1/2$. 因为 $S=(1/L)-1$,所以 $S=1$.

Ⅲ. 设 $b_0\neq 0$,对于 $n\geqslant 1$,定义 b_n 为

$$b_n = b_{n-1}^2 - 2. \tag{1}$$

我们要求和

$$S = \frac{1}{b_0} + \frac{1}{b_0 b_1} + \frac{1}{b_0 b_1 b_2} + \cdots,$$

假定此级数收敛. 定义 T 满足等式 $(b_0 - T)/2 = S$. 连续地应用(1),得到

$$\frac{b_n - T b_0 b_1 \cdots b_{n-1}}{2} = \frac{1}{b_n} + \frac{1}{b_n b_{n+1}} + \cdots \tag{2}$$

对于任意非负整数 n 成立. 令 $n \to \infty$,由于(2)的右边趋于0,所以我们有

$$T = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{b_0 b_1 \cdots b_{n-1}},$$

由(1)得

$$b_n^2 - 4 = b_0^2 b_1^2 \cdots b_{n-1}^2 (b_0^2 - 4),$$

从而 $T = \sqrt{b_0^2 - 4}$.

应用举例

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot 98} + \frac{1}{10 \cdot 98 \cdot 9602} + \cdots$$
$$= 5 - \sqrt{24},$$

$$\frac{1}{5} + \frac{4}{5 \cdot 17} + \frac{4 \cdot 16}{5 \cdot 17 \cdot 257} + \frac{4 \cdot 16 \cdot 256}{5 \cdot 17 \cdot 257 \cdot 65537}$$
$$+ \cdots = \frac{1}{4}.$$

(朱学贤译,潘承彪校)

用增函数定义的交错级数[①]

R. Johnsonbaugh

在微积分入门的教程中，讨论到交错级数 $\sum(-1)^{k+1}a_k$ 时，通常都假定序列 $\{a_k\}$ 是递减的且极限是零（见[9，p. 587]）. 在这些条件下，$\sum(-1)^{k+1}a_k$ 收敛. 本文将考虑 $\{a_k\}$ 是递增的交错级数.

我们只限于讨论 $\lim_{k\to\infty}a_k=\infty$ 的递增序列 $\{a_k\}$. 因为如果 $\{a_k\}$ 有上界，则 $\{a_k\}$ 收敛，设收敛到 L. 于是序列 $\{L-a_k\}$ 递减到零，从而我们可以用传统的假设条件研究交错级数

$$\sum(-1)^{k+1}(L-a_k).$$

设 f 是定义在 $(1,\infty)$ 上的实值函数，具有连续的三阶导数，并设 n 是一个奇正整数. 我们要用到等式

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}f(k)=[f(1)+f(n)]/2+[f'(n)-f'(1)]/4+\int_1^n f'''(t)X(t)\mathrm{d}t, \tag{1}$$

其中的 $X(t)$ 是一个分段函数：当 $1\leqslant t\leqslant 2$ 时，

① The alternating series defined by an increasing function, *The Amer. Math. Monthly*, 87(1980), 36—38.

$$X(t) = -(t^2/4) + ((3t)/4) - 1/2;$$

当$2 \leqslant t \leqslant 3$时，

$$X(t) = -X(t-1);$$

当$t \geqslant 1$时，$X(t+2)=X(t)$（见图1，它大致描绘了$y=X(t)$的图象）. 对于(1)式右边的积分用分部积分公式很容易验证(1)式成立. 得到这个等式的动机在[6]中给出.

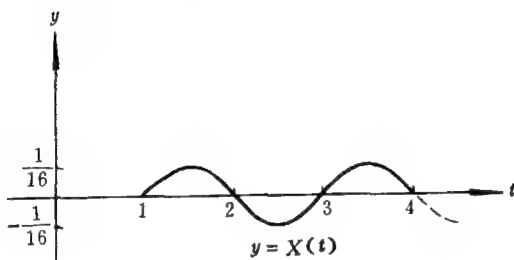


图 1

使用等式(1)的一个例子是设$f(t)=\ln(t+1)$. $f(t)$单调趋于∞. 等式(1)成为

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\ln(k+1)$$

$$= [\ln 2 + \ln(n+1)]/2 + [\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2}]/4$$

$$+ \int_1^n f''(t)X(t)\mathrm{d}t.$$

首先估计积分$\int_1^n f''(t)X(t)\mathrm{d}t$. 若令

$$\alpha_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}f(k) - f(n)/2$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\ln(k+1) - \ln(n+1)/2,$$

则有

$$\alpha_n = (\ln 2)/2 + [1/(n+1) - 1/2]/4 + \int_1^n f''(t)X(t)\mathrm{d}t. \qquad (2)$$

因为

$$\alpha_n = \ln \frac{2\cdot 4\cdots(n+1)}{1\cdot 3\cdots n\sqrt{n+1}}$$

是 Wallis 乘积(见[1,p. 299])的一半，所以

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n = (1/2)\ln(\pi/2).$$

在(2)式两边取极限得

$$(1/2)\ln(\pi/2) = (\ln 2)/2 - 1/8 + \int_1^\infty f''(t)X(t)\mathrm{d}t.$$

于是我们求得

$$\int_1^\infty f''(t)X(t)\mathrm{d}t \doteq 4.217762364 \times 10^{-3}.$$

由此可以估计

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\ln(k+1) \doteq [\ln 2 + \ln(n+1)]/2 + [1/(n+1) - 1/2]/4 + \int_1^\infty f''(t)X(t)\mathrm{d}t. \qquad (3)$$

绝对误差 $\left|\int_n^\infty f''(t)X(t)\mathrm{d}t\right|$ 不超过

$$\left|\int_n^{n+1} f''(n)X(t)\mathrm{d}t\right| = f''(n)/24, \qquad (4)$$

这可以由审视 $X(t)$的图象及注意到 $f''(t)$是递减的而得到.

假设我们要求使 $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\ln(k+1)$超过10的最小的 N. 利用等式(3)可以看到必须解方程

$$10=[\ln 2+\ln(N+1)]/2-1/8+\int_{1}^{\infty}f''(t)X(t)\mathrm{d}t.$$

我们略去$1/(N+1)$这一项,因为它将变得很小,以致不影响最初的计算.可以求得

$$N=308,865,755.26.$$

利用等式(3)以及等式(4),如果令 $s(n)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\ln(k+1)$,则求得

$$s(308865753)=9.9999999995\cdots,$$
$$s(308865755)=10.000000002\cdots,$$

误差不超过10^{-26}.因此,使 $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\ln(k+1)$ 超过10的最小的项数正好是308,865,755.类似的计算表明,如果要超过100,则大约需要4.6×10^{86}项.

以上说明的方法,或对它进行修改,可以应用于任意函数 f,只要存在 K,使得当 $k\geqslant K$ 时有 $f^{(k)}f^{(k+1)}<0$及$\lim_{t\to\infty}f^{(k)}(t)=0$.对于前面讨论的函数 $f(t)=\ln(t+1)$,我们有 $K=1$.如果 $K>1$,则需要等式(1)的更细致的描述,这可以由逐次应用分部积分公式而获得(见[6],特别是等式(2.7)).一个函数 f,如果满足条件 $f^{(k)}f^{(k+1)}<0,k=0,1,2,\cdots$,则称为是**完全单调**的(见[10]).

对于任意函数 $f(t)$,我们就没有那么幸运地可以求得

$\lim_{n\to\infty}\alpha_n$(以后称之为 α)的明确的公式. 从而积分$\int_1^{\infty}f''(t)X(t)dt$的计算变复杂了. 数 α 与在用 Euler-Maclaurin 求和公式分析发散级数时出现的数 r(见[4]或[7])类似.

设 f' 及 f'' 都递减并假定

$$\lim_{n\to\infty}f'(t)=0=\lim_{n\to\infty}f''(t).$$

这时,用与证明(4)式成立的类似的论述证明$\lim_{n\to\infty}\alpha_n$ 存在. 我们可以记

$$\alpha=\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}f(k)-f(n)/2\right]$$

$$=f(1)/2-f'(1)/4+\int_1^{\infty}f''(t)X(t)dt$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}f(k)-f(n)/2-f'(n)/4$$

$$+\int_n^{\infty}f''(t)X(t)dt.$$

从而我们取 n 足够大,使得绝对误差 $\left|\int_n^{\infty}f''(t)X(t)dt\right|$ 充分小,得到估计式

$$\alpha\doteq\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}f(k)-f(n)/2-f'(n)/4.$$

所要求的精确性可以用(4)式保证.

例如,取 $f(t)=\sqrt{t}$,则有

$$\alpha\doteq\sum_{k=1}^{101}(-1)^{k+1}\sqrt{k}-\sqrt{101}/2-1/(8\sqrt{101})$$

$$\doteq 0.3801047364,$$

此结果中的6位小数都是正确的,因为绝对误差至多是

$$\frac{3}{8\cdot 24\cdot 101^{5/2}}\doteq 1.524110979\times 10^{-7}.$$

可以求得$\int_1^{\infty} f''(t)X(t)\mathrm{d}t = 0.380105$，从而可以得到有关部分和$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sqrt{k}$增长速度的信息. 例如，我们可以求得，使 S_N 超过100，1000及10,000的最小的 N 值分别是39,697；3,996,961及399,969,593.

最后，我们提请读者注意参考文献[2]，[3]，[4]，[5]，[6]及[8]，其中涉及到精确的余项估计及级数部分和的增长速度.

参 考 文 献

[1] R. G. Bartle, The Elements of Real Analysis, Wiley, New, York, 1964.

[2] R. P. Boas, Jr., Estimating remainders, Math. Mag., 51(1978), 83—89.

[3] _____, Growth of partial sum of divergent series, *Math. Comp.*, 31 (1977), 257—264.

[4] _____, Partial sums of infinite series, and how they grow, *Amer. Math. Monthly*, 84(1977), 237—258.

[5] P. Calabrese, A note on alternating series, *Amer. Math. Monthly*, 69 (1962), 215—217.

[6] R. Johnsonbaugh, Summing an alternating series, *Amer. Math. Monthly*, 86(1979), 637—648.

[7] K. Knopp, Theory and application of Infinite Series, Blackie, London and Glasgow, 1928.

[8] M. A. Pinsky, Averaging an alternating series, *Math. Mag.*, 51(1978), 235—237.

[9] D. F. Riddle, Calculus and Analytic Geometry, 2nd ed., Wadsworth, Belmont, Calif., 1974.

[10] D. V. Widder, The Laplace Transform, Princeton University Press, 1941.

(朱学贤译，潘承彪校)

重排交错调和级数[①]

C. C. Cowen　K. R. Daridson　R. P. Kaufman

在包含有讨论无穷级数的多数初等教程中，大多叙述Riemann 定理，即："一个条件收敛的无穷级数，可以通过重排，使其和等于任意实数"，有时也给出证明. 但是，即使是在高等微积分或初等分析的课程中，在叙述了这条定理之后，教师们都可能有一种不安的感觉，感到定理的关键之处并没有抓住，涉及到的问题对于那些依然害怕无穷级数的学生来说也许太难以捉摸. 举些例子可能会好一些，这也正是本文的目的. 对于很大一类重排，我们将详细地计算重排的交错调和级数的和. 更为重要的是，对于初学微积分的学生，我们举出一个重排的例子使他们增加感性积累；对于学得较好的学生，我们提供求和这类级数的技巧给他们作为解一组题的基础. 本文叙述的结果是 Pringsheim 的旧的（1883年）工作（[3]，或[1，pp. 74—77]，[2，pp. 96—98]，或[5，p. 25]），但看来，这一工作并没有受到足够的注意.

所谓交错调和级数，即指级数

① Rearranging the alternating Harmonic series, *The Amer. Math. Monthly*, 87 (1980), 817—819.

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}k^{-1}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots,$$

它的和等于 ln2. 称一个级数是一个交错级数的**简单重排**，如果它是交错级数的重排，而且它的正项组成的子序列及负项组成的子序列都保留原先的次序. 例如，级数

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}\cdots \quad (1)$$

是交错调和级数的简单重排，但级数

$$1+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\cdots$$

则不是. 如果 $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ 是交错调和级数的简单重排，令 p_n 是 $\{a_1, a_2,\cdots,a_n\}$ 中的正项数，α 是重排中正项的渐近密度，即，$\alpha=\lim_{n\to\infty}p_n/n$，如果极限存在的话. 因此，对于没有重排的交错调和级数 $\alpha=1/2$，则对于前面的重排(1)，$\alpha=2/3$.

定理1([3]) 交错调和级数的简单重排收敛的充分必要条件是，该重排的正项的渐近密度 α 存在. 另外，密度为 α 的重排的和等于 $\ln 2+\frac{1}{2}\ln(\alpha(1-\alpha)^{-1})$.

下面我们给出此定理的一个简短的证明，但在此之前先用更直接的方法解几个特殊例子.

重排相加的一个最简单例子，Manning 认为是由 Laurent 给出的[2, p. 98]. Laurent 的重排是

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots, \quad (2)$$

它的 $\alpha=1/3$. 由插进括号的方法易得

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right)-\frac{1}{12}\cdots$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\right),$$

从而级数(2)的和等于$\frac{1}{2}\ln 2$. 插进括号的妙法是很吸引人的，但要将它推广到其它重排的求和则比较困难.

重排(1)可以用幂级数来处理，所用的方法与用 Taylor 级数于 $\ln(1+x)$ 去证明$\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}k^{-1}=\ln 2$的方法相同. 设

$$f(x)=x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}-\frac{x^8}{4}\cdots,\quad |x|<1.$$

用初等的估计可证明级数(1)收敛，且由 Abel 定理[4，p. 160 上的定理8.2]可得，它的和等于$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$. 由于

$$f(x)=\frac{1}{2}[\ln(1+x)-\ln(1-x)+\ln(1-x^4)]$$
$$=\frac{1}{2}\ln[(1+x)^2(1+x^2)],$$

因此重排(1)的和是$\frac{3}{2}\ln 2$. 一般说来，这一技巧对于由 n 个正项构成的组和由 m 个负项构成的组交替出现的重排是有效的. 这时所用的函数是

$$f(x)=\frac{1}{2}[\ln(1+x^m)-\ln(1-x^m)+\ln(1-x^{2n})]$$
$$=\frac{1}{2}\ln[(1+x^m)(1+x^n)(1+x+\cdots+x^{n-1})$$
$$\cdot(1+x+\cdots+x^{m-1})^{-1}].$$

此类计算产生一些有意思的习题，因为它们的严格分析需要若干幂级数理论的标准技巧(事实上，有可能由此证得定

理1，要注意到重排的和是渐近密度的增函数）.

定理1的证明 设 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 是交错调和级数的简单重排. 令 p_n 同前，$q_n = n - p_n$，从而有

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{p_n} (2j-1)^{-1} - \sum_{j=1}^{q_n} (2j)^{-1}.$$

对任意正整数 n，设 $E_n = \left(\sum_{k=1}^{n} k^{-1} \right) - \ln n$. 则序列 $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ 是正的递减序列，其极限 r 称为 Euler 常数.

因为

$$\sum_{j=1}^{q_n} (2j)^{-1} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{q_n} j^{-1} = \frac{1}{2} \ln q_n + \frac{1}{2} E_{q_n},$$

及

$$\sum_{j=1}^{p_n} (2j-1)^{-1} = \sum_{j=1}^{2p_n} j^{-1} - \sum_{j=1}^{p_n} (2j)^{-1}$$

$$= \ln(2p_n) + E_{2p_n} - \frac{1}{2} \ln p_n - \frac{1}{2} E_{p_n},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} \left[\ln 2p_n - \frac{1}{2} \ln p_n \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \ln q_n + E_{2p_n} - \frac{1}{2} E_{p_n} - \frac{1}{2} E_{q_n} \right]$$

$$= \ln 2 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \ln(p_n q_n^{-1}) + r - \frac{1}{2} r - \frac{1}{2} r$$

$$= \ln 2 + \frac{1}{2} \ln(\lim_{n\to\infty} p_n q_n^{-1}).$$

因此，级数收敛，当且仅当右面的极限存在，而极限正好是 $\ln 2 + \frac{1}{2} \ln(\alpha(1-\alpha)^{-1})$.

以上我们看到了，交错调和级数的重排的和仅仅依赖于渐近密度 α. 这种性质在某种意义上只有类似于调和级数的级数才具有，定理2将指出这一点. 我们建议读者自己证明或者阅读 Prisheim 的文章[3].

定理2[3]　设$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$是实数序列，满足条件：$|a_1| \geqslant |a_2| \geqslant |a_3| \geqslant \cdots$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$及 $a_{2k-1} > 0 > a_{2k}$, $k=1,2,3,\cdots$.

(1)如果$\lim\limits_{n\to\infty} n|a_n| = \infty$, S 是一个实数，则存在渐近密度是$\frac{1}{2}$的$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ 的一个简单重排，其和等于 S.

(2)如果$\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ 是级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ 的一个简单重排，其渐近密度 α 存在且$0<\alpha<1$，则$\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

参 考 文 献

[1] T. J. Ia. Bromwich, An Introduction to the Theory of Infinite Series, 2nd ed., Macmillan, London, 1947.

[2] H. P. Manning, Irrational Numbers, Wiley, New York, 1906.

[3] A. Pringsheim, Über die Werthveränderungen bedingt convergierten Reihe und Producte, *Mathematatische Annalen*, 22(1983), 455—503.

[4] W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis, 2nd, ed., McGraw-Hill, New York, 1964.

[5] E. T. Whittaker and G. N. Watson, A Course of Modern Analysis, Amer. ed., Cambridge University Press, 1943.

（朱学贤译，潘承彪校）

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$的一个初等证明①

Boo Rim Choe

在数学中，有些公式能用许多不同的方法证明，本文题目中的 Euler 公式就是其中的一个. 例如，它可以用单复变函数论中的 Cauchy 残数计算公式([1],[2],[3],[4])或 Weierstrass 乘积定理[5]证明. 很多高等微积分教科书也把它作为一道习题，使之可以利用 Parseval 定理([6],[7])或 Fourier 级数展开([6],[7],[8],[9])来证明. 此外，还有一些文章包含有它的初等证明，我们在文章后面的参考文献中列出了其中的几篇.

我们这篇小文章的目的是给出这一公式的另一个初等证明. 这一证明更为初等，后面的计算将表明这一点.

首先，因为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}$(由绝对收敛性)，所以只需证明

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}. \tag{1}$$

让我们考虑 arc sin$x$ 在 $x=0$附近的 Taylor 级数展开式

① An elementary proof of $\sum_{n=1}^{\infty}1/n^2=\pi^2/6$, *Amer. Math. Monthly*, 94(1987), 662—63.

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad (2)$$

它很容易由$(1-x^2)^{-1/2}$在$x=0$附近的二项式级数展开式导出.

由 Raabe 判别法,(2)中的级数在$x=1$处收敛,因而由 Weierstrass 的M判别法得,它在$[-1,1]$上一致收敛. 由 Abel 定理可知,它在$[-1,1]$上实际上表示了$\arcsin x$.

在(2)式两边代换$x=\sin t$, $-\pi/2 \leqslant t \leqslant \pi/2$,得

$$t = \sin t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \cdot \sin^{2n+1} t. \quad (3)$$

(3)式两边从0到$\frac{\pi}{2}$积分,由逐项积分得

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t dt. \quad (4)$$

另外,由 Wallis 公式得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t dt = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}, \quad n = 1,2,3,\cdots. \quad (5)$$

最后,将(5)式代入(4),即得(1)式.

参 考 文 献

[1] Jerrold E. Marsden, Basic Complex Analysis, W. H. Freeman, san Francisco, 1973, pp. 247-252.

[2] J. H. Curtiss, Introduction to The Functions of a Complex Variable, Marcell Dekker, New York, 1978, p. 267.

[3] Lars V. Ahlfors, Complex Analysis, 3rd ed., McGraw-Hill, New Yovk, 1979, p. 190.

[4] John B. Conway, Functions of One Complex variable, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1978, p. 122.

[5] Herb Silverman, Complex Variables, Houghton Mifflin, New York, 1975, p. 359.

[6] Walter Rudin, Principles of Mathematical Analysis, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1976, pp. 198—199.

[7] Robert G. Bartle, The Elements of Real Analysis, 2nd ed., Wiley, New York, 1976, pp. 341—343.

[8] Watson Fulks, Advanced Calculus, 3rd ed., Wiley, New York, 1978, p. 663.

[9] M. H. Protter and C. B. Morrey, A First Course in Real Analysis, Springer-Verlag, New York, 1977, p. 268.

[10] E. L. Stark, The Series $\Sigma_{k=1}^{\infty} k^{-s}, s = 2, 3, 4, \cdots$ Once More, Mathematics Magazine, 47(1974), 197—202.

[11] H. Anton, Calculus with Analytic Geometry, 2nd ed., Wiley, New York, 1984, p. 490.

[12] John A. Tierney, Calculus and Analytic Geometry, 3rd ed., Allyn and Bacon, Boston, 1975, p. 378.

后记 在 Amer. Math. Monthly, 95(1988), p. 331上西德图宾根(Tübingen)大学的 G. Turnwald 指出,本文中的证明实际上是 Euler 于1743年得到的. 因为这是一个很好的工作,所以我们仍译之并将 G. Turnwald 给编辑的信附在此.

给编辑的信

编辑:

在这本《月刊》(即 *Amer. Math. Monthly*——译者注)1987年8－9月期上短文栏的662－663页上，Boo Rim Choe 给出了$\sum 1/n^2=\pi^2/6$的一个极好的证明. 但是，必须指出的是，这一证明并不是新的：Euler 于1743年([1])就已发表这一证明，只不过形式上略微有点不同；参阅[2](第388页；210附近的脚注)及[3]. (在[3]中提到的 stäckel 的文章，重印在 Euler 的《全集》(Opera Omnia)第 I 卷第14册156—176页上).

[1] L. Euler, Demonstration de la somme de cette suite $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+$etc., *Journal littéraire d'Allemagne*, 2:1 (1743) 115—127. (*Opera Omina*, *I*, 14, 177—186.)

[2] K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Grandlehren der mathematischen Wissenschaften 2, 5th ed., Springer-Verlag, 1964.

[3] K. Knopp and I. Schur, Über die Herleitung der Gleichung $\Sigma_{n=1}^{\infty} 1/n^2=\pi^2/6$, *Archiv. der Math. und Physik*, 27 (1918) 174－176. (I. Schur, Gesammelte Abh., Ⅱ, 246—248; Springer-Verlag 1973).

Gerhard Turnwald
图宾根大学数学研究所
西德图宾根
(朱学贤译，潘承彪校)

著名的 Lévy 和 Steinitz 定理

Peter Rosenthal

本文作者在导师 Paul Halmos 指导下，于1967年获得 Michigan 大学博士学位. 他的兴趣主要是在希尔伯特空间中的有界线性算子方面，特别是在不变子空间方面.

1. 引言

我们都熟知级数重排的黎曼定理，它是说一条件收敛的实数项级数经重排后可以收敛到任意指定的实数. 因此，关于级数重排的结果可表叙成如下形式：一实数项级数的所有重排级数的和的集合或是空集，或是一点，或是整个直线.

关于复数项级数，相应的定理是什么呢？

经非正式调查，令人惊奇的是虽然八十多年前发表的论文中已经回答了这个问题，但当今数学家中很少有人知道这个问题的答案.

这个相应的定理是：一复数项级数的所有重排级数的和的集合或是空集，或是一点，或是复平面上一直线，或是整个复平面.

在 n 维空间中也有类似定理：

Lévy-Steinitz 定理[①]　设级数的项为有限维实欧氏空间中的向量，则所有重排级数的和的集合或是空集，或是一子空间的平移(即为集合 $v+M$，这里 v 是一向量，M 是一线性子

① 以下简写成 L-S 定理. ——译者注

空间).

既然有限维复向量空间是一2倍维数的实向量空间.所以由 L-S 定理可得:在复欧氏空间中的一级数,它的重排级数的和的集合或是空集,或是一实子空间的平移[①].

1905年,P. Lévy[4]首先证明了这个定理. 1913年,Steinitz[6]指出 Lévy 的证明是不完全的,特别在高维情形更是如此.他填补了 Lévy 证明中的空隙,而且给出了一完全不同的证法.

这定理所以鲜为人知,不是由于它的结论而是由于证明难度较大. 我们这里介绍的方法是经 Gross[1]改进后的 Steinitz 方法. 我们力图把证明分割成容易领会的几个片断,希望使证明变得既好理解又能引起兴趣. 此文的目的正是使这漂亮的结果能为更多人所知晓.

我们从 Gross[1]所证的"多边形限制定理"开始. 这定理是说任意有限个长度小于1,且和为0的向量集合[②],经重排后,总可使每一部分和都小于只依赖于向量空间维数的一个常数.

在第3节,我们讨论"重排定理". 它是说若一级数的部分和有一子序列收敛到 S,且级数的一般项趋于零,则存在级数的一个重排,使重排后级数收敛到 S. 这定理可由多边形限制定理推出,但它本身也是蛮有兴趣的.

我们在第4节介绍 L-S 定理. 在第5节简要地讨论某些有

---

① 请读者自己以一维复向量空间——即复平面为例,明确地表述这一结论.——译者注

② 这条件使有限个向量正好组成一多边形.——译者注

关结果.

我是从 Israel Halpein 那里听说 L-S 定理的. 他向我讲解定理的证明时,开始我没有听,觉得自己能用更简单方法证明这定理. 但结果我没有证出来,便请他细述定理的证明. 以下内容主要是根据那次个别讲解,为此我对他表示万分的感谢.

2. 多边形限制定理(Polygonal Confinement Theorem)

L-S 定理的 Steinitz-Gross 证明,是基于下面富有技巧性的引理.

多边形限制定理([6];[1]) 设$\{v_i : i=1,\cdots,m\}$为 n 维欧氏空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中一组向量,且其和为0,并对任一 i 满足模(即长度)$\|v_i\|\leqslant 1$. 则存在一仅依赖于维数 n 的常数 C_n,和$(2,\cdots,m)$的一个置换 P①,使对每一 $j(\geqslant 2)$,满足②

$$\|v_1+\sum_{i=2}^{j} v_{P(i)}\|\leqslant C_n.$$

事实上,我们能取 $C_1=1, C_n\leqslant\sqrt{4C_{n-1}^2+1}\ (n>1)$.

证明 先讨论 $n=1$情形. 这时证明是容易的. 无妨设 $v_1>0$,选取 $P(2)$,使 $v_{P(2)}<0$,继续选取负的 v,直到使选出的向量和变成非正为止. 然后选取正的 v,直到使选出的向量和变成非负为止. 依此选取下去,直至将所有的 v 取完. 由于对所有的 i,$\|v_i\|\leqslant 1$,所以如此重排后的每一部分和显然是介于1与-1之间. 因此 $C_1=1$.

---

① 即$(P(2),P(3),\cdots,P(m))$是$(2,3,\cdots,m)$的一个重新排列. ——译者注

② $v_1+\sum_{i=2}^{j} v_{P(i)}$就是原向量组 $v_1,v_2,\cdots,v_m$ 的一个重新排列的各个部分和. ——译者注

对一般情形的证明用数学归纳法，设 $n>1$，向量组 $\{v_i\}$ 满足定理中的假设. 假设定理对 n-1成立，C_{n-1} 为相应的常数.

考虑首项为 v_1，向量组 $\{v_i\}$ 的所有可能的部分求和. 因 $\{v_i\}$ 为有限集，所以这种部分和也是有限集. 记 L 是它们中模最大的那个部分和. 设 $L=v_1+u_1+\cdots+u_s$，$\{u_1,\cdots,u_s\}\subset\{v_2,\cdots,v_m\}$. 记余下的 v_i 为 $\{w_1,\cdots,w_t\}$. 显然，$L+w_1+\cdots+w_t=0$.

记号 $(u|v)$ 表示欧氏空间中向量 u 和 v 的内积.

我们先证明向量 v_1 及 $\{u_i\}$ 在大方向上都与 L 一致，而向量 $\{w_i\}$ 在大方向上都与 L 相反（画个图就可知这结论是很可信的），也就是说我们要来证明下面的结论(a)，(b)和(c).

(a)　$(u_i|L)\geqslant 0\quad (i=1,\cdots,s)$.

假设对某一 i，有 $(u_i|L)<0$，那末

$$\left((L-u_i)\,\Big|\,\frac{L}{\|L\|}\right)=\|L\|-\frac{1}{\|L\|}(u_i|L)>\|L\|,$$

由此得 $\|L-u_i\|>\|L\|$，这与 L 是模最大的部分和相矛盾.

(b)　$(v_1|L)\geqslant 0$.

若 $(v_1|L)<0$，那末

$$\left(-\frac{L}{\|L\|}\,\Big|\,(v_1+w_1+\cdots+w_t)\right)=\left(-\frac{L}{\|L\|}\,\Big|\,(v_1-L)\right)$$

$$=\|L\|-\frac{1}{\|L\|}(L|v_1)>\|L\|,$$

这样向量 $v_1+w_1+\cdots+w_t$ 的模比向量 L 的模更大，故矛盾.

(c)　$(w_i|L)\leqslant 0(i=1,\cdots,t)$.

若对某一 i，有 $(w_i|L)>0$，那末

$$\left((L+w_i)\,\Big|\,\frac{L}{\|L\|}\right)=\|L\|+\frac{(w_i|L)}{\|L\|}>\|L\|,$$

因此 $\|L+w_i\|>\|L\|$. 但 $\|L+w_i\|$ 是 $\{v_i\}$ 中一个部分和的模，这与

L 是模最大的部分和矛盾.

考虑$(n-1)$维空间 $L^{\perp}=\{v\in \boldsymbol{R}^n:(v|L)=0\}$①. 在 $L^{\perp}$中我们应用归纳法假设. 用 v' 表示向量 v 在 $L^{\perp}$中的分量②,即

$$v'=v-\frac{(v|L)}{\|L\|^2}L.$$

由 $L=v_1+u_1+\cdots+u_s$,得出 $v'_1+u'_1+\cdots+u'_s=0$. 同理可得 $w'_1+\cdots+w'_t=0$(因为 $w_1+\cdots+w_t=-L$. ——译者注). 根据归纳法假设,存在$(1,\cdots,s)$的一个置换 Q,使得

$$\left\|v'_1+\sum_{i=1}^{j}u'Q_{(i)}\right\|\leqslant C_{n-1}(j=1,\cdots,s).$$

同时存在$(2,\cdots,t)$的一个置换 R,使得

$$\left\|w'_1+\sum_{i=2}^{j}w'_{R(i)}\right\|\leqslant C_{n-1}(j=2,\cdots,t).$$

这里规定 $R(1)=1$.

现在的想法是:保持上面向量 u 与 w 的顺序(这将使部分和在 $L^{\perp}$上的分量不致太大),然后在 v_1后轮流选取 w 与 u,以得到$\{v_i\}$的一个重新排列,使其部分和沿 L 的分量的模不超过1(这如同 $n=1$情形时的证明一样).

确切说,因$(v_1|L)\geqslant0$与$(w_i|L)\leqslant0$,我们总能选取最小数 r,比如说 r_1,使得

$$\left(v_1|L\right)+\sum_{i=1}^{r_1}\left(w_{R(i)}|L\right)\leqslant 0.$$

然后选取最小数 s_1,使得

---

① 这是表示由 $\boldsymbol{R}^n$ 中所有和 L 正交的(即内积为零的)向量组成的子空间,它是一个 $n-1$维欧氏空间. ——译者注

② 不熟悉欧氏空间理论的读者,可以以 $n=2$为例,画个图来理解本文的所有论证,这能更清楚地看出证明的思想. ——译者注

$$\left(v_1|L\right) + \sum_{i=1}^{r_1}\left(w_{R(i)}|L\right) + \sum_{i=1}^{s_1}\left(u_{Q(i)}|L\right) \geqslant 0.$$

再选取最小数 r_2，使得

$$(v_1|L) + \sum_{i=1}^{r_1}(w_{R(i)}|L) + \sum_{i=1}^{s_1}(u_{Q(i)}|L) + \sum_{i=r_1+1}^{r_2}(w_{R(i)}|L) \leqslant 0.$$

如此下去，得到向量 $\{v_i\}$ 的一个排列

$$(v_1, w_{R(1)}, \cdots, w_{R(r_1)}, u_{Q(1)}, \cdots, u_{Q(s_1)}, w_{R(r_1+1)}, \cdots, w_{R(r_2)}, \cdots)$$

这样得到的 $\{v_i\}$ 重排，显然部分和沿 L 方向分量的模至多为1. 由归纳假设知部分和在 $L^{\perp}$ 上的分量的模至多为 $C_{n-1}+C_{n-1}$. 因此，部分和的模至多为 $\sqrt{4C_{n-1}^2+1}$. 证完.

3. 重排定理

重排定理在证明 L-S 定理中起关键作用，定理本身也是很有意思的.

为了应用方便，我们先从多边形限制定理引出下面的推论.

引理1 若 $\{v_i: i=1,\cdots,m\}\subset \boldsymbol{R}^n$，$\left\|\sum_{i=1}^{m} v_i\right\|\leqslant\varepsilon$，$\|v_i\|\leqslant\varepsilon(1\leqslant i\leqslant m)$. 那末存在 $(1,\cdots,m)$ 的一个置换 P，使得

$$\|v_{P(1)} + v_{P(2)} + \cdots + v_{P(r)}\| \leqslant \varepsilon(C_n + 1) \quad (1\leqslant r\leqslant m).$$

证 定义 $v_{m+1} = -v_1 - \cdots - v_m$，则 $\sum_{i=1}^{m+1} v_i = 0$. 由多边形限制定理，存在 $(2,\cdots,m+1)$ 的一个置换 P，使得

$$\left\|\frac{1}{\varepsilon}v_1 + \sum_{i=2}^{r}\frac{1}{\varepsilon}v_{P(i)}\right\| \leqslant C_n (2\leqslant r\leqslant m+1).$$

因而 $\left\|v_1 + \sum_{i=2}^{r} v_{P(i)}\right\| \leqslant \varepsilon C_n$. 令 $P(1)=1$，向量 $\{v_i\}_{i=1}^{m+1}$ 按 P 重

排中略去 v_{m+1}，即得 $\{v_i\}_{i=1}^{m}$ 的一个重排. 因 $\|v_{m+1}\| \leqslant \varepsilon$，所以删去 v_{m+1} 后引起部分和模的变化至多为 ε，即所有部分和的模至多为 $\varepsilon C_n+\varepsilon$. 引理证完.

重排定理 若 $\boldsymbol{R}^n$ 中的向量级数的部分和有一子序列收敛到 S，且级数的一般项趋于零向量. 则存在级数的一个重排，使重排后级数的和为 S.

证 设 $\{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的向量列. 令 $S_m=\sum_{i=1}^{m} v_i$. 假设子序列 $\{S_{m_k}\}$ 收敛到 S，我们要指出存在 $\{v_i\}$ 的一个重排，使重排级数部分和序列 $\{\sigma_m\}$ 收敛到 S. 我们的想法是利用引理1对每一组 $(v_{m_k+1},\cdots,v_{m_{k+1}-1})$ 进行重排，使这组重排后的每个部分和充分小，这样当 m 在 m_k 与 m_{k+1} 之间时，部分和 σ_m 与 S_{m_k} 可以充分接近(以下的证明读者能自己完成. ——译者注).

具体做法如下. 令 $\delta_k=\|S_{m_k}-S\|$，则 $\delta_k\to 0(k\to\infty)$. 注意到

$$\left\|\sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}-1} v_i\right\|=\left\|\sum_{i=1}^{m_{k+1}} v_i-\sum_{i=1}^{m_k} v_i-v_{m_{k+1}}\right\|$$

$$\leqslant \delta_{k+1}+\delta_k+\|v_{m_{k+1}}\|.$$

对每一 k，令

$$\varepsilon_k=\max\{\delta_{k+1}+\delta_k,\sup\{\|v_i\|:i\geqslant m_k\}\}.$$

显然有 $\varepsilon_k\to 0$，与

$$\left\|\sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}-1} v_i\right\|\leqslant 2\varepsilon_k.$$

由引理1，对每一个 k 存在 $(m_k+1,\cdots,m_{k+1}-1)$ 的一个置换 P_k，使得

$$\left\|\sum_{i=m_k+1}^{r} v_{P_k(i)}\right\|\leqslant 2\varepsilon_k(C_n+1),$$

其中 $r=m_{k+1},\cdots,m_{k+1}-1$.

现在重排$\{v_i\}$如下:对每一 k 保持 v_{m_k}不动,对$(m_k+1)\leqslant i\leqslant(m_{k+1}-1)$,$v_i$ 按照 P_k 重排. 这样得到的重排级数,当 $m_k+1\leqslant m\leqslant m_{k+1}-1$时,$\sigma_m-S_{m_k}=\sum_{i=m_k+1}^{m}v_{P_k(i)}$,因此,$\|\sigma_m-S_{m_k}\|\leqslant 2\varepsilon_k(C_n+1)$. 由条件 $S_{m_k}\to S$,$\varepsilon_k\to 0$,即得 $\sigma_m\to S$. 证完.

4. L-S 定理

为了证明定理,除重排定理外,我们还需要多边形限制定理的另一推论.

引理2 若$\{v_i\}_{i=1}^m\subset\boldsymbol{R}^n$,$w=\sum_{i=1}^m v_i$,$0<t<1$,且$\|v_i\|\leqslant\varepsilon(i=1,\cdots,m)$. 则存在$(1,\cdots,m)$的置换 P 与介于1与 m 间的自然数 r,使得

$$\left\|\sum_{i=1}^{r}v_{P(i)}-tw\right\|\leqslant\varepsilon\sqrt{C_{n-1}^2+1}.$$

证明 假设 $w\neq 0$(否则结论显然成立). 首先考虑 $n=1$情形. 设 $w>0$(否则考虑$-v_i$ 即成). 令 r 表示使

$$v_1+v_2+\cdots+v_i>tw$$

的最小 i. 当 $r>1$时,有

$$v_1+v_2+\cdots+v_{r-1}\leqslant tw.$$

注意$|v_i|\leqslant\varepsilon$,即得

$$|v_1+v_2+\cdots+v_r-tw|\leqslant\varepsilon.$$

当 $r=1$时,显然有

$$|v_1-tw|\leqslant\varepsilon.$$

故 $n=1$时引理成立,其中 $C_{n-1}=C_0$定义为0. 这时不必重排即求得适当的部分和.

再考虑 $n>1$ 情形. 因 $w=\sum_{i=1}^{m}v_i$, 所以 $\{v_i\}$ 在子空间 $w^{\perp}$ ① 上的投影 $\{v_i'\}$ 满足 $\sum_{i=1}^{m}v_i'=0$, 及 $\|v'_i\|\leqslant\varepsilon(1\leqslant i\leqslant m)$. 故可应用多边形限制定理,存在 $(2,\cdots,m)$ 的一个置换 P, 令 $P(1)=1$, 则

$$\left\|\frac{1}{\varepsilon}v'_{P(1)}+\frac{1}{\varepsilon}v'_{P(2)}+\cdots+\frac{1}{\varepsilon}v'_{P(j)}\right\|\leqslant C_{n-1},$$

这里 $j=1,\cdots,m$.

又因

$$\left(v_{P(1)}\,\middle|\,\frac{w}{\|w\|}\right)+\left(v_{P(2)}\,\middle|\,\frac{w}{\|w\|}\right)+\cdots+\left(v_{P(m)}\,\middle|\,\frac{w}{\|w\|}\right)=\|w\|$$

与

$$\left|\left(v_i\,\middle|\,\frac{w}{\|w\|}\right)\right|\leqslant\varepsilon(1\leqslant i\leqslant m).$$

故可利用 $n=1$ 时所得结果,存在自然数 r, 使得

$$\left|\left(v_{P(1)}\,\middle|\,\frac{w}{\|w\|}\right)+\left(v_{P(2)}\,\middle|\,\frac{w}{\|w\|}\right)+\cdots+\left(v_{P(r)}\,\middle|\,\frac{w}{\|w\|}\right)-t\|w\|\right|\leqslant\varepsilon.$$

由分量的估计即得向量的估计:

$$\|v_{P(1)}+v_{P(2)}+\cdots+v_{P(r)}-tw\|^2\leqslant\varepsilon^2C_{n-1}^2+\varepsilon^2.$$

引理2证完.

现在我们来证主要定理.

L-S 定理([4],[6]) $\boldsymbol{R}^n$ 空间中级数的所有重排的和的

---

① $w^{\perp}$ 和前面的 $L^{\perp}$ 定义相同. ——译者注

集合或是空集，或是一子空间的平移①.

证 令 S 表示级数 $\sum_{i=1}^{\infty} v_i$ 重排的和的集合（只考虑重排后仍收敛的级数）. 假定 S 不是空集，用 $v_1 - v(v \in S)$ 代替 v_1. 故我们可假设 $0 \in S$. 问题只需证 S 为一子空间.

我们先来证明，由 $0, s_1, s_2$ 属于 S，可推出 $s_1 + s_2$ 也属于 S. 证明可通过几次重排来实现，其思路如下. 选取一趋于零的正数列 $\{\varepsilon_m\}$，总存在级数 $\sum v_i$ **依某种顺序排列的部分和** A_1（以下说的部分和都是这样理解. ——译者注）与 s_1 的距离小于 ε_1，然后根据级数有一重排收敛到0，总可构造一部分和 B_1，使它包含部分和 A_1 的项且与0的距离小于 ε_1. 再根据级数有一重排收敛到 s_2，又可构造一部分和 C_1，使它包含前一部分和 B_1 的项，且与 s_2 的距离小于 ε_1. 继续按这样后一部分和的项包含前一部分和的项的方法，构造与 s_1 的距离小于 ε_2 的部分和 A_2，与0的距离小于 ε_2 的部分和 B_2，与 B_2 的距离小于 ε_2 的部分和 C_2. 依此下去，我们得到一串虽在项的排列顺序上可能不同，但在所包含的项上总是后一个包含前一个的部分和序列② $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, \cdots, A_i, B_i, C_i, \cdots$. 在趋于 s_2 的部分和 C_i 中先除去上一个趋于0的部分和 B_i 中的项，再加上前一个趋于 s_1 的部分和 A_i 的项，这样就可以得到一串新的部分和序列 $C'_1, C'_2, \cdots$，它也是后一个的项包含前一个的项且趋于 $s_1 + s_2$. 于是借助重排定理就可得到收敛于 $s_1 + s_2$ 的重排级数.

下面作详细说明. 令 $\{\varepsilon_m\}$ 为趋于0的正数列. 既然级数有

---

① $n=2$ 时，这定理应怎样更直观地表述，请读者按 $n=2$ 时直观地理解证明的实质. ——译者注

② 事实上，通过适当的调整，总可使它们的顺序也一样. ——译者注

一重排收敛到 s_1，故存在有限的正整数集 I_1，使 $1\in I_1$，且 $\left\|\sum_{i\in I_1} v_i - s_1\right\| \leqslant \varepsilon_1$. 又因级数有一重排收敛到0，故有一有限的正整数集 J_1，使得 $J_1 \supset I_1$，且 $\left\|\sum_{i\in J_1} v_i - 0\right\| \leqslant \varepsilon_1$. 同样有集合 $K_1 \supset J_1$，且 $\left\|\sum_{i\in k_1} v_i - s_2\right\| \leqslant \varepsilon_1$. 有集合 I_2，同时包含集合 K_1 与 $\{2\}$，且 $\left\|\sum_{i\in I_2} v_i - s_1\right\| \leqslant \varepsilon_2$. 依此下去，逐一地构造出集合 I_m，J_m，K_m 使得

$$\{1,\cdots,m\}^{①} \subset K_{m-1} \subset I_m \subset J_m \subset K_m,$$

且

$$\left\|\sum_{i\in I_m} v_i - s_1\right\| \leqslant \varepsilon_m, \quad \left\|\sum_{i\in J_m} v_i - 0\right\| \leqslant \varepsilon_m,$$

$$\left\|\sum_{i\in K_m} v_i - s_2\right\| \leqslant \varepsilon_m.$$

现在我们来重排级数. 对每一 m，重排 J_m 使属于 I_m 的数放在前面，重排 K_m 使属于 J_m 的数放在前面. 再重排 I_{m+1} 使属于 K_m 的数放在前面. 由此得到正整数集的一个置换 P. 相应得到级数的一个重排 $\sum_{i=1}^{\infty} v_{P(i)}$. 若用 i_m, j_m, k_m 表示集合 I_m, J_m, K_m 的元素个数，显然，$i_m < j_m < k_m < i_{m+1}$，且

$$\left\|\sum_{i=1}^{i_m} v_{P(i)} - s_1\right\| \leqslant \varepsilon_m, \quad \left\|\sum_{j=1}^{j_m} v_{P(j)} - 0\right\| \leqslant \varepsilon_m,$$

$$\left\|\sum_{k=1}^{k_m} v_{P(k)} - s_2\right\| \leqslant \varepsilon_m \quad (m \geqslant 1).$$

---

① 为什么要这一条件？不加这条件会出现什么问题？——译者注

注意到

$$\left\|\sum_{i=j_m+1}^{k_m} v_{P(i)} - s_2\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{k_m} v_{P(i)} - \sum_{j=1}^{j_m} v_{P(j)} - s_2\right\|$$

$$\leqslant \varepsilon_m + \varepsilon_m.$$

于是得出

$$\left\|\sum_{i=1}^{i_m} v_{P(i)} + \sum_{i=j_m+1}^{k_m} v_{P(i)} - (s_1 + s_2)\right\| \leqslant 3\varepsilon_m \quad (m \geqslant 1).$$

再次重排级数$\sum_{i=1}^{\infty} v_{P(i)}$. 具体做法是对每一 m，交换向量 $\{v_{P(i)}: i=i_m+1, \cdots, j_m\}$ 与向量 $\{v_{P(i)}: i=j_m+1, \cdots, k_m\}$ 在级数中的位置. 对新的重排级数，上一式子表明该级数有一部分和的子序列收敛到 s_1+s_2. 因 $S\neq\varnothing$，所以 $v_{P(i)}\to 0 (i\to\infty)$. 根据重排定理，存在另一重排级数，它的和为 s_1+s_2，即 $s_1+s_2\in S$.

余下来只需证明由 $s\in S$，推出 $ts\in S$ (t 为实数). 由于 S 的可加性，当 t 为正整数时结论成立，所以只需让 $t\in(0,1)$ 与 $t=-1$ 时结论成立即可.

我们从证集合 S 的可加性时得到的重排级数$\sum_{i=1}^{\infty} v_{P(i)}$出发. 固定 $t\in(0,1)$. 已知

$$\left\|\sum_{i=j_m+1}^{k_m} v_{P(i)} - s_2\right\| \leqslant 2\varepsilon_m \quad (m \geqslant 1).$$

令 $\delta_m=\sup\{\|v_{P(i)}\|: i=j_m+1, \cdots, k_m\}$，和

$$u_m = \sum_{i=j_m+1}^{k_m} v_{P(i)} - s_2.$$

应用引理2，存在$(P(j_m+1), \cdots, P(k_m))$的一个重排 Q_m 及一数 $r_m (j_m+1\leqslant r_m\leqslant k_m)$，使得

$$\left\| \sum_{i=j_m+1}^{r_m} v_{Q_m(P(i))} - t(s_2 + u_m) \right\| \leqslant M\delta_m, \quad M = \sqrt{C_{n-1}^2 + 1}.$$

因而

$$\left\| \sum_{i=j_m+1}^{r_m} v_{Q_m(P(i))} - ts_2 \right\| \leqslant M\delta_m + 2\varepsilon_m.$$

由此得出

$$\left\| \sum_{i=1}^{j_m} v_{P(i)} + \sum_{i=j_m+1}^{r_m} v_{Q_m(P(i))} - ts_2 \right\| \leqslant M\delta_m + 3\varepsilon_m.$$

这表明存在级数的一个重排，它的部分和序列有一子序列收敛到 ts_2. 再根据重排定理知 $ts_2 \in S$.

最后证 $-s_2 \in S$. 注意到

$$\left\| \sum_{i=1}^{j_{m+1}} v_{P(i)} - \sum_{i=1}^{k_m} v_{P(i)} - (0 - s_2) \right\| \leqslant \varepsilon_{m+1} + \varepsilon_m,$$

或

$$\left\| \sum_{i=k_m+1}^{j_{m+1}} v_{P(i)} - (-s_2) \right\| \leqslant \varepsilon_{m+1} + \varepsilon_m.$$

则有

$$\left\| \sum_{i=1}^{j_m} v_{P(i)} + \sum_{i=k_m+1}^{j_{m+1}} v_{P(i)} - (-s_2) \right\| \leqslant \varepsilon_{m+1} + 2\varepsilon_m.$$

交换向量 $\{v_{P(i)}: i = j_m + 1, \cdots, k_m\}$ 与向量 $\{v_{P(i)}: i = k_m + 1, \cdots, j_{m+1}\}$ 在级数中的位置，得一新的重排级数，该级数部分和有一子序列收敛到 $-s_2$. 根据重排定理知 $-s_2 \in S$，定理证完.

5. 附注

关于 L-S 定理，自然会提出下面有关问题.

(1) 任一子空间的任意平移，能否是某一级数所有重排

和的集合呢？

容易看出问题的解答是肯定的，若 M 是任一子空间，v 为任意向量，$\{e_1,\cdots,e_m\}$ 表示 M 的基. 设 $\{x_i\}$ 是任一条件收敛的实数列（例如，$x_i=(-1)^i/i$）. 由黎曼定理，容易得出向量 $\{v, x_ie_j: j=1,\cdots,m; i=1,2,\cdots\}$ 的所有重排和的集合为 $v+M$.

(2) 向量 $\{v_i\}$ 满足什么样的条件时，就能断定重排和的集合是空集，或是真子空间的平移，或是全空间 R^n？

从 Lévy 或 steinitz 的证明中即能找到问题的解答. 一个条件是一般项 $\{v_i\}$ 趋于0；一个条件是对任一向量 w，级数 $\sum_{i=1}^{\infty}(v_i|w)^+$ 与 $\sum_{i=1}^{\infty}(v_i|w)^-$ 的和或同时为有限，或同时为无穷. 若这两个条件都满足时，重排和的集合不是空集，否则为空集. 这里 $a^+=\frac{|a|+a}{2}$，$a^-=\frac{|a|-a}{2}$.

当上述两个条件都满足时，且对任一方向都不绝对收敛（即对每一 w，级数 $\sum_{i=1}^{\infty}(v_i|w)^+$ 与 $\sum_{i=1}^{\infty}(v_i|w)^-$ 同时为无穷），那末重排和的集合为全空间 R^n. 若有一些非零向量 w，使上面两级数和为有限，则重排和的集合为 $v+M$，这里 v 是任一和，M 是这些 w 所张空间的正交补空间.

上面叙述加深了原 Lévy[4]，steinitz[6]，Gross[1]文章中的讨论，这方面的讨论也可参看[2].

(3) 在别的拓扑向量空间中情形如何呢？

因为具有相同维数的有限维拓扑向量空间是同构的，所以 L-S 定理在任一有限维空间中成立.

在希尔伯特空间中，Marcinkiewicz（[5，p. 106]）首先举出了一个反例，这反例可以嵌入到许多巴拿赫空间. 但在由序列

构成的拓扑向量空间中定理仍成立[3].这些结果的讨论以及 Lévy 方法的改进,读者可以参看[2].

参 考 文 献

[1] W. Gross, Bedingt konvergente Reihen, *Monat. Math. Physik*, 28 (1917),221-237. 66

[2] Israel Halperin, Sums of a Series, Permitting Rearrangements, *C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada*. Ⅷ(1986),87—102.

[3] Y. Katznlson and O. C. McGehee, Conditionally convergentseries in R$^{\infty}$, *Mich. Math. J.* 21,(1974),97—106.

[4] P. Lévy. Sur les séries semi-convergentes, *Nouv. Ann. d. Math.*, 64 (1905),506—511.

[5] *R. D. Mauldin, editor*, The Scottish Book, Birkhauser, Boston, 1981.

[6] E. Steinitz, Bedingt Konvergente Reiben and Konvexe Systeme, *J. f. Math*, 143(1973),128—175.

(方企勤译,潘承彪校)

e的一个无穷乘积①

N. Pippenger

Stirling 在确定他的渐近公式 $n! \sim (2\pi n)^{1/2}e^{-n}n^n$ 中的常数因子时([2,p. 137]),用到了 Wallis 的无穷乘积公式([1,p. 180])

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{5}\frac{6}{7}\frac{8}{7}\cdots.$$

Wallis 乘积的一个惊人的姐妹公式是

$$\frac{e}{2}=\left(\frac{2}{1}\right)^{1/2}\left(\frac{2}{3}\frac{4}{3}\right)^{1/4}\left(\frac{4}{5}\frac{6}{5}\frac{6}{7}\frac{8}{7}\right)^{1/8}\cdots,$$

它可以证明如下. 对于 $\nu \geqslant 2$,第 ν 个因子是 $[2^{\nu-1}\cdots 2^{\nu}/(2^{\nu-1}+1)\cdots(2^{\nu}-1)]^{1/2^{\nu}}=[((2^{\nu-1}-1)!!)^2(2^{\nu}!!)^2/2(2^{\nu-1}!!)^2((2^{\nu}-1)!!)^2]^{1/2^{\nu}}$,其中用到的记号 $n!!$,当 n 是偶数时等于 $n(n-2)\cdots 4\cdot 2$,当 n 是奇数时等于 $n(n-2)\cdots 3\cdot 1$. 因为 $2^{\nu}!!=2^{2^{\nu-1}}2^{\nu-1}!$ 及 $(2^{\nu}-1)!!=2^{\nu}!/2^{\nu}!!=2^{\nu}!/2^{2^{\nu-1}}2^{\nu-1}!$,所以上面的表达式成为 $[2^{2^{\nu}}(2^{\nu-1}!)^6/2\cdot(2^{\nu-2}!)^4(2^{\nu}!)^2]^{1/2\nu}$. 对于 ν 用归纳法,得前 ν 个因子的乘积是 $[2\cdot 2^{\nu 2^{\nu}}(2^{\nu-1}!)^2/(2^{\nu}!)^2]^{1/2^{\nu}}$. 应用 Stirling 公式并令 $\nu\to\infty$,就得到公式的证明.

参 考 文 献

---

① An infinite product for e ,*The Amer. Math. Monthly*,87(1980),p. 391.

[1] J. Wallis, Arithmetica Infinitorum, Oxford, 1656.
[2] J. Stirling, Methodus Differentialis, London, 1730

（朱学贤译，潘承彪校）

交叉分布中蒲丰针的设计问题[①]

JACK M. ROBERTSON ANDREW F. SIEGEL

1. 介　绍

1733年，蒲丰(Buffon，1707—1788)向科学研究院提交的一份报告中涉及到了许多问题．其中就有他后来用几何概率方法解决了的投针问题．在这个著名的问题中，关于投针与一族等间隔平行线相交之概率的计算，直到1777年才发表在他的著作《自然历史补遗》上．《自然历史》共36卷，涉及内容十分广泛．其中包括概率学，天文学(行星的冷却)，物理学，植物物理学(轮船设计中木材的抗张强度)，林学，生理学，烟火制造术，动物学，植物学，矿物学等等．

人们利用几何概率方法对原始的蒲丰针问题作了许多推广．蒲丰本人也考虑过相当广泛的一类问题："如果向空间投掷的不是象硬币一样的圆物，而是别的形状的物体，如西班牙方形手枪，一根针，或一根棍等，就必需具有更多的几何知识，尽管一般情形下可以通过比较空间的方法来解决"．(见[2])．[4]，[5]，[7]中考虑了加长和弯曲的投针；[1]，[10]则在更一般的几何图形下讨论了相交之概率；[6]，[9]为了改善逼近 π 的统计量而修改了网格；文献[3]则部分回答了逆问题：构造

---

① Designing BUFFON'S needle for a given crossing distribution，*Amer. Math. Monthly*，93(1986)，p. 116—119.

弯针，使其交点数具有给定的概率分布.

设平面被一族间距为1的平行线构成的网格所覆盖，向该网格随机地投掷一条具有有限长度 $L(\mathscr{B})$ 的曲线 $\mathscr{B}$. 这里，随机的意义是指，$\mathscr{B}$ 上任一点到网格上与该点最近的直线的距离服从 $\left[0,\frac{1}{2}\right)$ 上的均匀分布，且 $\mathscr{B}$ 上任一点处的切线与网格上各直线间的夹角相互独立地服从 $(0,2\pi)$ 上的均匀分布. 在文[7]中证明，$\mathscr{B}$ 与网格的交点的个数之期望为 $2L(\mathscr{B})/\pi$.

2. 同心圆试验

反过来考虑逆问题，即设计一试验，使其交点数具有给定的概率分布. 确切地说，就是给定满足条件 $p_n\geqslant 0$, $\sum_{n=0}^{\infty}p_n=1$ 的数列 $p_0,p_1,p_2,\cdots$，希望在设计的试验中，弯针与网格有几个交点的概率恰为 $p_n(n\geqslant 0)$.

先考虑 $p_1=p_3=p_5=\cdots=0$ 的情况，即交点数概率为1的是偶数，我们以圆作为设计的基础.

以 $\mathscr{B}$ 表示一系列同心圆 $c_0,c_2,c_4,\cdots$，其中 c_{2n} 的直径为

$$d_{2n}=1-\sum_{j=0}^{n}p_{2j},$$

以 $x\left(0\leqslant x<\frac{1}{2}\right)$ 表示同心圆的圆心与网格中距该圆心最近的直线的距离，并设 x 服从 $\left[0,\frac{1}{2}\right)$ 上的匀均分布. 于是，当且仅当 $d_{2n}/2<x<d_{2n-2}/2$ 时 $\mathscr{B}$ 与网格有 $2n$ 个交点，且其概率为 $2(d_{2n-2}/2-d_{2n}/2)=p_{2n}$. 从而得到下面的

定理1 给定关于偶数点0,2,4,…的概率分布，必存在一族同心圆 $\mathscr{B}$，使当 $\mathscr{B}$ 随机地投落在一族平行线上时，它们的

交点数的分布恰为给定的概率分布.

3. 蒲丰针集试验

现在,取掉关于零交点概率的限制转而考虑一般情况.设给定的概率分布为

$$P=\{p_i\}_{i=0}^{\infty},\quad p_i\geqslant 0,\quad \sum_{i=0}^{\infty}p_i=1,$$

并限制 $p_0\geqslant 1-2/\pi$.令

$$x_n=\frac{\pi}{2}\cdot\left(1-\sum_{i=0}^{n}p_i\right),\quad n=0,1,2,\cdots.$$

因 $p_0\geqslant 1-2/\pi$,故知 $x_n\leqslant 1$对所有 n 成立,这就保证了我们将要构造的蒲丰针集与覆盖平面的网格直线中至多一根相交.对 $n=0,1,2,\cdots$,以 L_n 表示覆盖区间$[0,x_n]$的针(事实上,我们要求这些针被集中,并具有公共的顶点).由针集的结构知,区间$[x_n,x_{n-1}]$恰被 n 根针覆盖.将针集随机地投向平面上间距为1的网格平行线,并假定在这一过程中针集之结构保持不变.设 q 是针集的公共顶点,y 为从 q 到 q 之上的离 q 最近的平行线的距离,θ 为平行线与从 q 所引射线的夹角.又设 y 服从$[0,1)$上的均匀分布,θ 服从区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$上的均匀分布并与 y 独立.由对称性可知,$\theta\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right)$,$[\pi,\frac{3}{2}\pi)$,$\left[\frac{3}{2}\pi,2\pi\right)$的情况可化为$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$的情况.

定理2 将针集随机地投向平行线族,则二者有 n 个交点的概率为 p_n.

证明 当 $x_0\sin\theta<y$ 时,交点数为零.其概率为

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 - x_0\sin\theta)\mathrm{d}\theta = p_0 \quad (\text{图 } 1)$$

当 $x_n\sin\theta < y < x_{n-1}\sin\theta$ 时，交点数为 n（图1阴影部分所示）. 其概率为

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x_{n-1} - x_n)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{2}{\pi}(x_{n-1} - x_n) = p_n.$$

最后，取掉 $p_0 \geqslant 1-\frac{2}{\pi}$ 的限制，我们来看一般的情况. 首先，利用一个附带条件的简单试验. 令 $q_n = p_{n-1}, n=1,2,\cdots$. 此时令 $x_0=1$ 及

$$x_n = 1 - \sum_{i=1}^{n} q_i, \quad n \geqslant 1.$$

对每个 n，以 L_n 表覆盖区间 $[0, x_n]$ 的针，故 $(x_n, x_{n-1}]$ 仍被 n 个根覆盖. 同上投此针集，以 t_n 表示在交点数不为零之条件下交点数为 n 的条件概率，$n \geqslant 1$. 同法可证 $t_n = q_n = p_{n-1}$，从而此试验可以产生任何给定的概率分布.

下例给出了另一种应用更为广泛的针集结构. 设有三根长为 l 的针，$0<l<1$，它们具有共同的顶点，其中两根垂直且与第三根都成45°夹角. y 及 θ 的条件同上，但这里 θ 服从 $[0, \pi)$ 上的均匀分布. 交点数为0，1，2，3的区域如图2所示. 容易通过调整针集结构来得到一般的分布. 如针与针之间的夹角可以不等，针的长度也可以不同并可大于1. 这种推广的实现，就

需要计算与各种概率分布有关的面积.

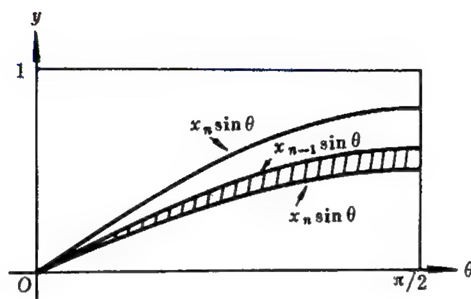


图 1

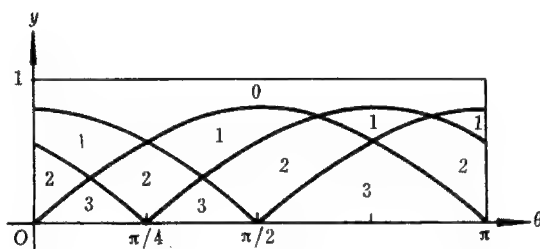


图 2

参 考 文 献

[1] M. E. Barbier, Note sur le problème de l'aiguille et jeu du joint couvert, J. Mathém. 5(1860)272—286.

[2] G. Buffon, L'Histoire Naturelle, 4 Supplement(1777)685—713.

[3] D. Detemple and J. Robertson, *Constructing Buffon curves from their distributions*, this MONTHLY, 87(1980)779—784.

[4] P. Diaconis, Buffon's problem with a long needle, J. Appl. Probab, 13 (1976)614—618.

[5] M. G. Kendall and P. A. P. Moran, Geometric Probability, Hafner, New York, 1963.

[6] M. Perlman and M. Wichura, On sharpening Buffon's needle, Amer. Statist, 28(1975)157—163.

[7] J. F. Ramaley, Buffon's noodle problem, this MONTHLY, 76(1969) 916—918.

[8] J. Roger, Georges-Louis Leclerc, Comte de Buffon, Dictionary of Scientific Biography, ed. C. Gillispie, Charles Scribner's Sons, New York, 1970.

[9] E. F. Shuster, Buffon's needle experiment, this MONTHLY, 81(1974) 26—29.

[10] H. Solomon, Geometric Probability, SIAM, 1978.

（张　浩译，谢衷洁、范永亮校）

我们能使数学易懂吗?①

R. P. Boas②

为什么我们数学家会有不被人理解而感到为难的时候?许多人对数学表示反感,并把产生这种反感的原因归咎于自己的老师,其中有些是正确的但有些是错误的[1].学生们抱怨说读不懂自己的教科书,我当学生时情形就是如此,或许还要早得多.其它学科的专业人员不情愿地去写自己报告中的数学部分,它使他们感到头疼.然而,直到担任了本《月刊》(《美国数学月刊(*American Mathematical Monthly*)》——译者注)的编辑之后,我才真正体会到,对于一个数学家来说,所写的东西即使要让别的数学家看懂(同专业的人除外),也是十分困难的.许多稿件被退回,不是由于数学上的缺陷,而是因为普遍缺乏易懂性,而且这类稿件数量之大是令人震惊的.我的

---

① Can we make mathematics intelligible? *Amer. Math. Monthly*, 88(1981), 727—731.

② Ralph Philip Boas是著名数学家,1978—1981年担任《美国数学月刊》主编.本文从认识论的角度就数学的教育与研究——实质上是对整个数学的发展——发表了他的看法.看完文章后,你不一定会全部同意他的观点,但毫无疑问的是,他所提出的八个方面的问题和意见是值得每个关心数学教育和数学发展的人深思的.——编者注

一位前任35年前就有过非常相同的体会[2].从另一个角度来看,为什么在数学的讲解和著述中,我们所采用的方式往往总是戏剧性地干扰我们明显想要达到的目标呢?我希望自己能弄明白.至少,我能提出几条原则,它们常常被数学教师和数学著作者违背.这些原则之所以被违背,也许是因为,它们与在我的许多同时代人看来是不言而喻的真理相矛盾(这些原则也与关于如何教授数学的美国数学会报告[3]没有什么共同之处).

抽象定义(Abstract Definitions) 假定你要给一个很小的孩子讲"猫"的概念.你是否要解释说,猫是一种比较小的基本上食肉的哺乳动物,有能缩进去的爪子,并能发出一种独特的叫声等等呢?我敢断定你一定不会这样做.你可能会带这孩子去观察许多不同的猫,每次都亲昵地称它们"小猫咪",直到孩子有了"猫"的概念为止.推广开来看,普遍性最好是由经验抽象得来.它们——这些具体的实物——应该在某个时刻归结为一个(抽象的概念);否则,具体实物记得太多就会使脑子负担不了.

有一个检验法,可以在早期鉴别出某些人可能是未来的专业数学工作者.他们是这样一些学生,能迅速领会以"设 X 是一个有序的五元组$(a, T, \pi, \sigma, \mathscr{B})$,其中…"作为开头的句子.如果有的人加上一句,"先前我从来没有真正读懂它",则他(她)兴许更有指望.当然,并不是说,所有的专业数学工作者都是这样;但是,如果你连这样的句子都不能理解,那就很难成为一个专业数学家.

然而,除非你特别幸运,否则你的大多数听众将会是这样

一些人：他们不是专业数学家，或者不想成为数学家，或者永远不可能成为专业数学家. 一开始，他们就将听不懂你以一个抽象的定义（更不用说马上给出一打）出发的任何东西，因为他们还不清楚可以概括出这一抽象定义的任何具体实物. 请不要马上给我递条子，气愤地说什么抽象和概括对于数学的发展是何等的重要. 我知道这一点. 但我确信，Banach 在写下 Banach 空间的公理时，他的脑子里已有许多特殊的空间作为模型. 此外，我在这里仅仅是讨论数学的交流，而不是在谈它的创造.

举个例子来说，如果你要给一个中等程度的班级讲解如何求一点到一个平面的距离，那末你应该首先去求，比如说，从点(2，-3，1)到平面 $x-2y-4z+7=0$的距离. 因为这样一来，一般的做法就几乎是很显然的了. 教科书通常都是这样写的. 有一条很好的一般原则：如果你的介绍已经具体到你认为应该做到的2倍，那么实际上，你最多只是到达了它理应做到的一半（着重点为译者所加）.

要记住的是，**你**是年复一年地在与数学家打交道. 因此，你可能不仅仅是象数学家那样思考，而且认为每一个人也都是象数学家那样思考. 但是，任何一个不是数学家的人都会告诉你情况不是这样.

类似（或类比）(Analogy)　在解释一个新概念时，如果你说它类似于大家熟悉的另一个概念，则听众就能比较好地理解. 但有时这种做法也会落空，这与听众对那个被类似的概念的理解程度有关. 积分是和的极限；因此我们会认为，由于和比较简单（没有极限过程！），根据相似性，学生们就会推断，和

具有什么性质,积分也将具有什么性质.难道他们不会这样做吗?但实际情况看来并不如此.对许多人来说,积分比和容易,这里也许有着某些深刻的原因[4].

词汇(Vocabulary)　决不要毫无必要地引进专业术语[5].如果你要谈到可数多个开集的交,且只提一次!则没有必要去定义 F_δ 和 G_δ 这类概念.

有人曾要我相信,如果没有现代线性代数的专门术语,则任何人都不能真正理解线性方程组.如果你相信这一点,那你想必是忘记了,在线性代数的现代术语创造出来之前许多年,人们就已经很好地理解了线性方程组.专业术语能使叙述简洁,但简洁并不是清晰表述的全部含意.当然,利用现代专业术语还能使我们所讲述的内容超过用过时的形式所表达的内容.但是,如果这样做的话,那末在一门课开始的时候,学生的主要精力将不得不用于去记住**词汇**,而这本来可以用来更有效地学习数学.付出较多的注意力于词汇而不是内容本身,将会使内容失色.这就是为什么会使得一些学生认为:Riemann 积分与 Lebesgue 积分之间的实质性差别在于,一种是分割 x 轴而另一种是分割 y 轴的原因所在.

如果你认为你能创造出比现时流行的要好得多的词汇,毫无疑问,你是对的.但遗憾的是,除了你自己的学生以外,你不可能赢得许多人去使用你创造的词汇;更为冷酷的事实是,在读其他任何人的著作时,你的学生将会感到很困难.每个世

纪，只要有一个 Bourbaki[1]就会生产出足够整个数学社会所能吸收的所有新名词.

任何时候，如果你**不得不**创造一些新名词，那你至少要不怕麻烦地去弄清楚它们没有已经被用于去表示别的不同的意思."分布"一词现在在概率论和泛函分析中被赋予不同的意义，这无助于交流. 另一方面，如果你要用到一些旧的现时已不流行的词汇，那末最好是解释清楚它们的含意. 我的一位朋友曾被一个阅历不深的审稿人指责为"创造"稀奇古怪的名词，其实那是 Kepler 创造的.

特别危险的是，你假设听众已经理解了你的词汇，或者设想这些词汇对于你和对于其他人所表达的意思是完全一样的. 我认识某个人，他认为只要是高中毕业的人就知道有关 Fourier 变换的所有内容，但实际情形并不如此，相反的证据很多. 另外一些人以为每一个人都明白他们所说的 Abel 定理的内容，因而从不说明他们引用的究竟是 Abel 许多定理中的哪一条.

更为严重的一个问题来自于我称之为是衰老性(geratologisms)的现象(如果这没有违背我的原则的话)，即：有些在通常的讲话和文章中即使没有被实际废弃的词汇和用语，也正逐渐不常使用而变得过时了. 现代文章的风格比19世纪的更简洁和更直接，但数学教科书要除外. 就在写这篇文章时，我还从一本 微积分书上受到"教益". 这本书以这样一个问题开

---

① Bourbaki 是一个数学学派，认为整个数学应统一地建立在一套完备的基础上. 有关介绍可参看《数学译林》：3(1980)，65—70；3(1984)，274—281；5(1986)，234 237；5(1986)，341—346. ——译者注

始："梁的强度的改变正比于…"(The strength of a beam varies directly as …). 我不知道变化(variation)这一行话在高级中学中是否还在使用，但我从来没有听说过这样的事：在一个45人的班中，只有一个学生(而且还是一个外国人)知道一点儿这段话的意思. 如果你要责备学生，那就责备高级中学吧；至于我，却要责备这本教科书的作者，因为他并没有意识到现时学生所用的语言已不同了. 另一本流行的微积分书上说，"以百万分率表示的微粒的浓度，理论上按平方反比率减少(Particulate matter concentrations in parts per million theoretically decrease by an inverse square law)". 你要用这种说法在《每周新闻》，甚至在《纽约人》上写文章是一定通不过的，但在教科书中却….

教科书的作者(讲课人也一样)应该始终记住的是，要设想自己是在给学生，而不是在给教师演讲. 什么是一个函数? 教科书希望你说类似于这样的话："它是一个规则，把每一个实数与一个唯一指定的实数相联系."这段话确实定义了函数，但所用的方式却使学生难以理解. Poincaré[6]在1909年就已指出问题的要害："只有学生能理解的定义才是令人满意的"，但看来数学教师们并没有十分注意这一点.

符号(Symbolism)是一类特殊的专业术语. 没有它，数学就不可能进步. 数学上的大量进展依赖于创造合适的符号体系. 但是，千万不要让我们变得如此着迷于符号以致忘记了它们所代表的东西. 我们的听众(不管他们是在听讲还是在阅读)对符号的熟悉程度比我们差. 举一个简单例子. 说"设 f 属于 L^2"而不是说"设 f 是一个可测函数而且平方可积"，这并

不是一个好的做法，除非你已确信听众熟悉这一符号. 而且，如果你实际上并不打算将集合 L^2 作为一个 Hilbert 空间来使用，而仅仅用到它的元素，即函数所具有的性质，那末空间的结构与这些性质毫不相干. 因此，说得委婉些，提到它无非是有一点炫耀的意思，但它**确是**一种炫耀. 如果听众不知道这一符号，他们就会感到神秘；但如果听众熟悉这一符号，他们就会奇怪你何时才谈及主题.

我的那些关于新专业术语的意见对于新的符号体系更为适用. 切忌不必要地去创造新的符号体系或去改变旧的一套；但要允许(如果有必要的话)用法变化，同时要解释新旧用法的同义性. 如果在你的文章中，$\Phi(x)$ 在其它地方还表示 $P(x)$ 或 $P(x)+\frac{1}{2}$ 或 $F(x)$，**则必须这样做**. 记号的不负责任的改动已经造成了足够多的麻烦. 我不知道是谁在球坐标系中首先使用 θ 去表示方位角而不是表示余纬角的，以往几乎普遍如此，现在在物理学和高等数学中仍在使用. 表面看来，这是一种合理的规定，因为它使得这里的 θ 与平面极坐标系中的相同，但由于两者中的 r 完全不一样，所以好处并不大. 可糟糕的却是，在学完了初等微积分之后，学生还得再学一遍所有的这些公式. 这种复杂性虽然迷惑不了一些坚定的纯粹数学家(他们能一眼看出 Newton 第二运动定律能表成 $v=(d/d\sigma(\mathscr{R}q))$，但确实迷惑住了许多学生，而且还激怒了物理学家.

证明(Proofs)　只有专业数学家才从证明中学习一切. 其他人都从阐述中学习. 但我不信，即使是数学家，在他们不熟悉的领域里也是从证明中学到许多东西的. 大多数工作能够

由论述来完成，这些论述还称不上是规范的证明. 我听说有一位数学教授(我不愿意说他是"教师")花了整整一学期时间，在非常一般性的假定条件下，给学生证明 Cauchy 积分定理. 其实，讲一些特殊情形并举一些例子能使人更相信结论是正确的，这样还可留出时间去接触更多类型的及更有意思的材料. 此外，还能让听众有较好的准备去理解、应用、推广以至讲授 Cauchy 定理.

不记得是谁第一个这样说过：什么是一件毛衣呢？它就是当爸爸(或妈妈)感到冷的时候，他(或她)的孩子所要穿上的；而一个证明就是当老师感到一条定理模模糊糊不大可靠时，学生们所必须听的. 有人曾经说过[7]："有些最重要的结果…刚一看到会使人如此惊奇，以致除了证明之外，没有任何东西能使它们被人相信. "但这类事情远比你想像的要少得多.

有经验的父母都知道，当孩子问"为什么？"时，他并不一定是希望听到解释，或许只是想和你多聊聊. 同样的原则也适用于学生对证明的询问.

严格性(Rigor)　这是一个经常与普遍性或完全性相混淆的概念. 我认为(不管评论家们会说些什么)，在讲述一条定理的特殊情形，而不是讲述你所知道的最一般的情形时，或者在讲述一个简单的充分条件而不是最复杂的一个充分条件时，没有什么东西是不严格的. 例如，在讲述 Fourier 级数的 Dirichlet 判别法时，我喜欢讲函数"逐段单调且有界"，它比"有界变差"的条件容易被学生理解；而且事实上，在(后来要学的)许多定理中同样有效.

强制对方听你叙述你所知道的一切，是妨碍有效交流的

最坏的敌人之一.如果我们,比如说,能使自己承认,虽然物理系的学生需要某些 Fourier 分析的知识用于量子力学,但这并不需要花费整整一个学期——两个星期就差不多的话,我们和物理系的关系就会融洽得多.

对方需要多少就讲多少,过份详尽是和**卖弄学问**紧密相连的.用我的话来说,这是“过份地强调意义不大的细节”.

这里可以举个例子.假定学生在求一个可微函数 f 的极小值,他们求得驻点是 $x=2$和 $x=5$,除此之外没有别的驻点.再假定他们不想用(或者被告知不要用)二阶导数判别法.有些教科书会告诉他们,对于所有很小的 h 去检查 $f(2+h)$和 $f(2-h)$.而学生自然喜欢去检查 $f(3)$和 $f(1)$.卖弄学问的教师就会说“不行”,而诚实的教师就会允许用不越过另一个驻点的任意一点来检查.

热情(Enthusiasm)　教师们经常被鼓励去表现对自己学科不适当的热情.你可曾听过一个真正热情的专门家滔滔不绝地演讲一些你不知道而且也根本不想知道一丁点儿有关信息的事情吗?比如说,12世纪时波尔达维亚(Poldavia)的青铜货币,或者“关于”附属字 De 的学说”[8]?好吧,那就….

技巧(Skills)　许多数学家为养家糊口而讲授的大部分数学,是由诸如初等代数、微积分或数值计算等这样一些学科组成的 ——简言之,即技巧.判断一个学生是否已经掌握了一种技巧,或者如我们所喜欢说得那样,是否“真正”学会了一门学科,并不总是一件容易的事情.其中的困难非常类似于去判断类人猿能否按一种在语言学中有兴趣的方式使用语言那

样;或者去判断当它们按开关和挥手时是否已变得很有心智那样.数学技巧和任何一种别的技巧都是相同的.如果你学弹钢琴,一般总是在别人指导下以实践开始,绝不会以声音振动及钢琴内部结构的理论课开始.数学技巧的学习也是如此.我们经常读到或听到人们在比较讲课和讨论的优点,仿佛它们是指导学生仅有的两种方式.其实,学生在有人指导下自己实践是另一种十分有效的方式.遗憾的是,这既不符合传统,付出的代价又太高.

在相当大的程度上,甚至数学研究也是一种可以教授的技巧.G. H. Hardy 的一个学生有一次向我描述这是如何实现的.如果你是 Hardy 的学生,他会给你提出一个问题,他相信你能解出这个问题.一旦解出来了,他便要你在某种较特殊的情形中推广这个结果.如果你又做到了,他就会提出另一种推广.这样一直做下去.在一定数量的重复之后,你就会自己发现(并解决)问题.这样做的结果,虽然你不一定会学成第二个 Gauss,但你必定能学会做有益的工作.

讲课(Lectures)　这对于激发热情是重要的.作为一种教育手段,当印刷术发明之后,它理应被逐渐废弃.当静电复印机问世后,我们又有了第二次机会,但看来也已经错过了.如果你**必须**讲课,则至少要能分发你准备讲的(或希望你讲的)材料.我认识一些数学家,他们坚决主张,只有通过讲课才能表达他们对自己学科的个人看法.在高层次上,即对于那些准备成为专门家的学生说来,这或许是对的.但是,我怀疑这些数学家的个人看法是否真正值得去学习,而且即便值得学习的话,难道就不能通过别的途径(比如,在咖啡馆里喝咖啡)让

学生更好地了解吗？

一个伟大的秘密是，人怎么能从一堆难以理解的胡说中抽象出有用的信息？事实上，我们不但能而且正是这样做的．例如，读读 Morris Klein 的著作[10]中关于微积分教学历史的章节就可以知道了．我们拥有的这种才能也许能解释讲课的大众性．一次难以理解的演讲是不行的，整个课程或许还会有点效果，但一本难以读懂的书是永远不可能取得效果的．我仍然坚持，一本容易读懂的书要更好些．

结论　对于那些刚当教师的人，我常常建议他们："想想你老师所做的那些你特别不喜欢的事情——并且自己不要去做．"迄今为止，这看来仍是一条好的建议，但还远远不够．对于本文标题中的问题，我的一点不成熟的看法是："能，但不能由自我完善的办法来做到．"除非而且直到你了解了自己的听众之后，才能指望有效地交流（不管是在课堂上还是在写作中）．这不是一门容易学会的课程．

参 考 文 献

[1] See, for example, Sydney. J. Harris, Column for February 9, 1980, Chicago Sun-Times and elsewhere.

[2] L. R. Ford, Retrospect, *Amer. Math. Monthly*, 53(1946), 582—585.

[3] College Mathematics: Suggestions on How to Teach it, *Mathematical Association of America*, 1972.

[4] D. R. Stoutemyer, Symbolic computation comes of age, *SIAM News*, 12, *no.* 6(*December* 1979)1, 2, 9.

[5] The same point has been made by P. R. Halmos in How to Write Mathematics, *L'Enseignement mathe'matique*, (2)16(1970), 123—152.

[6] H. Poincaré, Science et méthode, 1909 Book II, Chapter 2.
[7] H. and B. S. Jeffreys, Methods of Mathematical Physics, 2nd ed., Cambridge University Press, 1950, p. v.
[8] Robert Browning, "A Grammarian's Funeral," in The Complete Poetic and Dramatic Works of Robert Browning, Houghton Mifflin, Boston and New York, 1895, pp. 279—280.
[9] For example. E. S. Savage-Rumbaugh, D. M. Rumbaugh, and S. Boysen, Do apes use language? *Amer. Scientist*, 68(1980), 49—61.
[10] Morris Kline, Mathematics: The Loss of Certainty, Oxford University Press, New York, 1980.

(朱学贤译，冷生明、潘承彪校)

第二十九届国际数学奥林匹克竞赛试题

编者按 国际数学奥林匹克(International Mathematical Olympiad，简称 IMO)是世界性的高中学生数学竞赛[①]. 自1959年在罗马尼亚举行第一届竞赛以来，除1980年没有举行外，每年一次. 我国和IMO的联系是从1985年开始的，1986年起正式派代表参加，在三届竞赛中都取得了好成绩.

我们请参加第29届IMO的我国代表，北京大学数学系88级学生何宏宇(金牌获得者，得满分42分)和王健梅(女，银牌获得者)把他们参赛时的解答基本上按原样写出来，供大家分析、学习，还请他们写了一篇文章谈谈比赛的情况和感想. 同时，请徐明曜等同志做了一份较详细的赛题分析与解答. 为了为竞赛做一点有益的事，本丛书以后将每年都这样做.

1. 考虑平面上半径为 R 和 $r(R>r)$ 的两个同心圆. 设 P 是小圆圆周上的一个固定的点，B 是大圆圆周上的动点. 直线 BP 交大圆周于另一点 C. 过 P 与 BP 垂直的直线 l 与小圆周交于另一点 A(如果 l 与小圆相切于 P，则 $A=P$).

① 关于IMO的简单介绍，可参看《数学译林》1988年第7卷第2期上的文章"国际数学奥林匹克的历史".

(1) 求 $BC^2+CA^2+AB^2$的取值的集合；

(2) 求线段 AB 中点的轨迹.

2. 设 n 为一正整数且 $A_1, A_2, \cdots, A_{2n+1}$是某个集合 B 的子集. 设

(a) 每一个 A_i 恰含有$2n$ 个元素；

(b) 每一个 $A_i \cap A_j (1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 2n+1)$恰含有一个元素；

(c) B 中每一个元素至少属于两个子集 A_i.

问： 对怎样的值 n,可以对 B 中的每一元素贴一张写有0或1的标签,使得每个 A_i 中恰含有 n 个贴上了写有0的标签的元素?

3. N 为正整数集. 在 N 上定义函数 f 如下:$f(1)=1$, $f(3)=3$,且对 $n \in N$ 有

$$f(2n) = f(n), \tag{1}$$

$$f(4n+1) = 2f(2n+1) - f(n), \tag{2}$$

$$f(4n+3) = 3f(2n+1) - 2f(n). \tag{3}$$

问： 有多少个 $n \in N$ 且 $n \leqslant 1988$使得 $f(n)=n$?

4. 证明： 满足不等式

$$\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \geqslant \frac{5}{4}$$

的实数 x 的集合是互不相交的区间的并集,并且这些区间长度的总和等于1988.

5. 在直角三角形 ABC 中,AD 是斜边 BC 上的高. 连接三角形 ABD 的内心与三角形 ACD 的内心的直线分别与边 AB 及边 AC 相交于 K 及 L 两点. 三角形 ABC 与 AKL 的面积分别记为 S 与 T.

求证： $S \geqslant 2T$.

6. 正整数 a 与 b 使得 $ab+1$ 整除 a^2+b^2.

求证：$\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}$是某个正整数的平方.

第二十九届国际数学奥林匹克竞赛试题解答

徐明曜　等

1.［**分析与解答**］　设二同心圆的圆心为 O，OP 延长线与大圆的交点为 E. 设想动点 B 由 E 出发在大圆周上沿反时针方向旋转. 图1到图4画出了当 B 在上半圆周运动到各种不同位置时的图形. 其中图1表 $B=E$ 的情形，这时 $A=P$；图3是 BP 与 OP 垂直时的情形；图2和图4是一般情形. 当 B 运动到下半

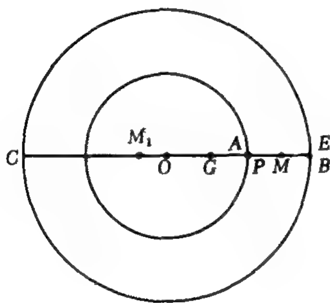


图1　($A=P$)

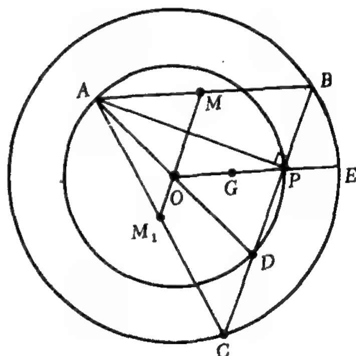


图　2

圆周时，虽然图中并未画出，但由于点 B 和点 C 的地位是对称的，我们可在上述诸图中对调 B,C 两点的位置以得到相应的图形. 在所有这些图中，我们以 G 表 OP 的中点，M 和 M_1分

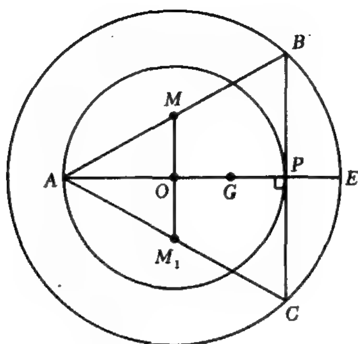


图 3

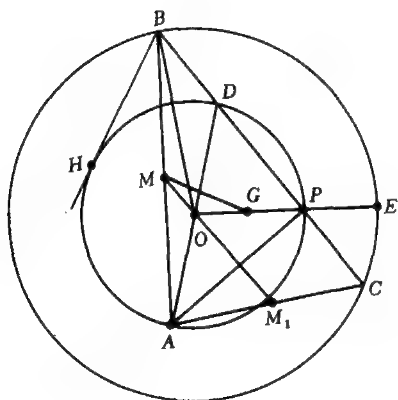


图 4

别表 AB 和 AC 的中点.

(1) 令 $I=BC^2+CA^2+AB^2$,来求 I 取值的集合. 我们逐

一分析图1到图4 的情形.

在图1的情形,因 B,P,O 共线,$A=P$,有

$$BC^2 = 4R^2, \quad AB^2 = (R-r)^2, \quad AC^2 = (R+r)^2.$$

于是

$$I = 4R^2 + (R-r)^2 + (R+r)^2 = 6R^2 + 2r^2.$$

在图3的情形,因 BP 与 OP 垂直,A,O,P 共线并且 BP 与小圆相切. 这时有

$$AB^2 = CA^2 = BP^2 + 4r^2, \quad BC^2 = 4BP^2, \quad BP^2 = R^2 - r^2.$$

于是

$$I = 6BP^2 + 8r^2 = 6R^2 + 2r^2.$$

在图2或图4的一般情形(见图4),设 D 为 BC 与小圆周的另一交点. 因 BP 与 AP 垂直,A,O,D 共线,即 AD 为小圆的直径. 又,此时明显有 $BD=CP$. 令 $PD=a,BD=CP=b$,我们有

$$\begin{aligned} AB^2 &= BP^2 + AP^2 = (a+b)^2 + AD^2 - PD^2 \\ &= 4r^2 + 2ab + b^2, \\ AC^2 &= AP^2 + PC^2 = AD^2 - PD^2 + PC^2 \\ &= 4r^2 - a^2 + b^2, \\ BC^2 &= (a+2b)^2 = a^2 + 4ab + 4b^2, \end{aligned}$$

于是

$$I = 8r^2 + 6ab + 6b^2 = 8r^2 + 6b(a+b).$$

作 BH 与小圆相切,设切点为 H. 有 $BH^2=BD\cdot BP=b(a+b)$. 又,显然有 $BH^2=R^2-r^2$,于是 $R^2-r^2=b(a+b)$. 代入上式得

$$I = 8r^2 + 6(R^2 - r^2) = 6R^2 + 2r^2.$$

因此,对于所有的情形都有 $I=6R^2+2r^2$,即 I 所取值的集合为 $\{6R^2+2r^2\}$.

(2) 为求 AB 中点 M 的轨迹,首先我们注意到当 B 在大

圆周上变动时，M 与 OP 中点 G 的距离 MG 是个常量，它等于 $\frac{1}{2}R$. 为证明这点，我们只考虑图4中的一般情形，其它简单的情形留给读者.

在图4中连结 MO 和 M_1O. 因 M,O,M_1 分别为 AB,AD,AC 的中点，有 $MO\parallel BC$，$M_1O\parallel BC$，从而 M,O,M_1 共线. 于是 $\angle AOM_1=\angle ADC$. 因 $AP\perp BC$，有 $AP\perp M_1O$，于是 $\angle AOM_1=\angle POM_1$. 由此得 $\angle POM_1=\angle ADC$，又得 $\angle ADB=\angle MOG$. 考虑 $\triangle MOG$ 和 $\triangle BDO$. 由 $OG=\frac{1}{2}OP=\frac{1}{2}OD$，$OM=\frac{1}{2}BD$，$\angle ADB=\angle MOG$ 得 $\triangle MOG\sim\triangle BDO$，且相似比为 $\frac{1}{2}$. 这就得到了 $MG=\frac{1}{2}OB=\frac{1}{2}R$.

至此我们已经可以看出，AB 中点 M 的轨迹应为以 G 为圆心，$\frac{1}{2}R$ 为半径的一个圆. 事实上，刚才已经证明，AB 中点 M 一定在这个圆上；另一方面，当 B 从 E 点出发沿大圆周转一圈时，$\angle BPE$ 由 $0°$ 连续变到 $360°$，同时 $\angle MOG$ 也由 $0°$ 连续变到 $360°$，因此 M 描出整个圆周(更详细的证明留给读者).

（杨晚兰 解答）

2. [分析与解答]

答案为：当且仅当 n 为偶数时上述要求可以满足.

为解此题，先把它转化为一个图论问题.

以 $V=\{A_1,A_2,\cdots,A_{2n+1}\}$ 为顶点集合作一个 $2n+1$ 个点的

完全图[①]G，它的边集合是

$$E=\{\{A_i,A_j\}\mid 1\leqslant i<j\leqslant 2n+1\},$$

边数 $|E|=C_{2n+1}^2=n(2n+1)$.

我们如下建立集合 E 到 B 内的一个映射 φ：因为由条件(b)，对于任意的 $A_i,A_j,i\neq j,A_i\cap A_j$ 恰含一个元素，我们记这个元素为 b_{ij}，并规定

$$\varphi(\{A_i,A_j\})=b_{ij},\quad 1\leqslant i<j\leqslant 2n+1,$$

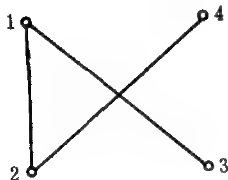


图 5

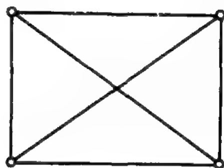


图 6

这就确定了 E 到 B 的一个映射 φ. 下面来证明 φ 是一一映射. 首先，由条件(c)，φ 为满射，并且对任意的 i，$1\leqslant i\leqslant 2n+1$，有

$$A_i=\{b_{ij}\mid 1\leqslant j\leqslant 2n+1, j\neq i\}. \tag{1}$$

再据条件(a)，A_i 含 $2n$ 个元素，因此对任意的 i 有

---

① 一个非空有限集合 V 和 V 的全体二元子集的集合 $V^{(2)}$ 的一个子集 E 合在一起叫做一个图 G，记作 $G=(V,E)$；V 叫做图 G 的顶点集合，E 叫做图 G 的边集合. 例如取 $V=\{1,2,3,4\}$，$E=\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,4\}\}$，则图 $G=(V,E)$ 可用图5所示来表示：任取四个点代表 G 的四个顶点1，2，3，4. 对每条边，即 V 的一个二元子集，它属于 E，则用一条线连结该二元子集中的两个顶点，代表这条边. 见图5.

称图 $G=(V,E)$ 为完全图，如果 $E=V^{(2)}$，即 V 的任意二点之间都有一条边相连. 四点完全图的图示见图6.

$$b_{ij}\neq b_{ik}\text{，只要 } j\neq k. \tag{2}$$

至此容易证明 φ 也是单射：对于 E 中任二不同的边 $\{A_i,A_j\}$ 和 $\{A_s,A_t\}$，若它们在 φ 之下的象相同，即有 $b_{ij}=b_{st}$，则必有

$$\{b_{ij}\}=A_i\cap A_j\cap A_s\cap A_t.$$

因为 $\{A_i,A_j\}$ 和 $\{A_s,A_t\}$ 是二不同的边，故在 i,j,s,t 中至少有三个两两都不相同，譬如设 i,j,s 两两不同，这将推出

$$A_i\cap A_j=A_i\cap A_s,$$

由此得 $b_{ij}=b_{is}$，与(2)矛盾.

这样，映射 φ 建立了集合 B 和图 G 的边集合 E 之间的一一对应，由(1)可得这个对应还满足下述性质：集合 A_i 的全部 $2n$ 个元素恰对应于图 G 中以 A_i 为一个端点的 $2n$ 条边.

至此，题目的要求就转化为给图 G 的每条边贴一个0或1的标签，使得从图中任一点 A_i 出发的 $2n$ 条边中恰有 n 条边贴有0的标签. 问这是否可能?这就变成了一个图论的问题.

因为图 G 有 $n(2n+1)$ 条边，如果上述贴标签的要求能够实现，显然边数必为偶数，于是推出 n 必为偶数，必要性得证.

反过来，如果 $n=2m$ 是偶数，我们把图 G 中的边 $\{A_i, A_{i+k}\}$，$1\leqslant i\leqslant 2n+1$，$k\in\{\pm1,\pm2,\cdots,\pm m\}$，全标上0，其余的边标上1，则得一题目要求的贴标签方法(注意，上式中的加法模 $2n+1$ 进行.). 这是很容易看出的：首先这样的标法是有意义的，即同一条边 $\{A_i,A_j\}$ 的标签是确定的. 这因为 $i-j\in\{\pm1,\cdots,\pm m\}\Leftrightarrow j-i\in\{\pm1,\cdots,\pm m\}$. 另外，显然每点出发 n 条标有0的边. 于是充分性也得到证明. [1]

---

① 不熟悉图论语言的读者，可以参考本解答用自己的语言来解，然后，回过来以图论角度看本题，这对提高我们的水平是有益的. ——编者注

（徐明曜 解答）

3.［**分析与解答**］为找出 $f(n)$ 和 n 的关系，通常先对于较小的 n 值计算出 $f(n)$，并试图找出规律．经计算得到表1：

表 1

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$f(n)$	1	1	3	1	5	3	7	1	9	5	13	3	11	7	15	1	17	9

但从表1中似乎也看不到什么规律．这时我们再来分析题目所给出的递推关系：为计算 $f(4n+1)$，需知 $f(2n+1)$ 和 $f(n)$，而 $2n+1$ 又可能是 $4m+1$ 型或 $4m+3$ 型，因此在使用递推关系时，光知道一个数是 $4m+1$ 型或 $4m+3$ 型是不够的，还应知道 $2n+1$ 以至 n（如是奇数的话）是 $4m+1$ 型或 $4m+3$ 型的，以便应用不同的递推关系式．为了解决这个困难，我们会看到如果先把数 n 表成二进制，即令

$$n=\sum_{i=0}^{k}a_i2^{k-i},\qquad a_0=1,\text{而 } a_i=0\text{ 或 }1,\ i>0, \tag{3}$$

计算起来可能会容易应用递推关系式，因而也便于寻找 $f(n)$（当然 $f(n)$ 也用二进制表示）与 n 的关系①．

在把数表成二进制后，表1变成

---

① 请读者更深入地想一下，如何从题目的条件出发，经过具体推导，发现要用二进制来解本题，这对提高我们分析、解决问题的能力是有益的．这种具体推导将在解答后给出．——编者注

表 2

n	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001
$f(n)$	1	01	11	001	101	011	111	0001	1001

n	1010	1011	1100	1101	1110	1111	10000	10001	10010
$f(n)$	0101	1101	0011	1011	0111	1111	00001	10001	01001

从表2中稍经观察即可发现 $f(n)$ 似应为由 n 表成二进制后颠倒诸位数字后得到(当然得到的是 $f(n)$ 的二进制表达式). 于是我们猜想若设 n 表成二进制(3)式,则应有

$$f(n)=\sum_{i=0}^{k}a_i2^i. \tag{4}$$

下面用对 n 的归纳法证明(4)式. 表2说明(4)式对于较小的 n 成立,因此可假定对于比 n 小的值(4)式已经成立,来证(4)式对 n 也成立. 分以下三种情形:

(1) n 是偶数:这时 $a_k=0$. 由题中条件(1)得

$$f(n)=f\left(\frac{n}{2}\right)=f\left(\sum_{i=0}^{k-1}a_i2^{k-1-i}\right)=\sum_{i=0}^{k-1}a_i2^i,$$

故(4)式成立.

(2) $n\equiv1\pmod 4$:这时 $a_k=1,a_{k-1}=0$. 由题中条件(2)得

$$\begin{aligned}f(n)&=2f\left(\frac{n+1}{2}\right)-f\left(\frac{n-1}{4}\right)\\&=2f\left(\sum_{i=0}^{k-2}a_i2^{k-1-i}+1\right)-f\left(\sum_{i=0}^{k-2}a_i2^{k-2-i}\right)\end{aligned}$$

$$=2\left(2^{k-1}+\sum_{i=0}^{k-2}a_i2^i\right)-\sum_{i=0}^{k-2}a_i2^i$$

$$=2^k+\sum_{i=0}^{k-2}a_i2^i,$$

故(4)式成立

(3) $n\equiv 3(\mathrm{mod}4)$：这时 $a_k=a_{k-1}=1$. 由题中条件(3)得

$$f(n)=3f\left(\frac{n-1}{2}\right)-2f\left(\frac{n-3}{4}\right)$$

$$=3f\left(\sum_{i=0}^{k-1}a_i2^{k-1-i}\right)-2f\left(\sum_{i=0}^{k-2}a_i2^{k-2-i}\right)$$

$$=3\sum_{i=0}^{k-1}a_i2^i-2\sum_{i=0}^{k-2}a_i2^i$$

$$=3a_{k-1}2^{k-1}+\sum_{i=0}^{k-2}a_i2^i$$

$$=2^k+2^{k-1}+\sum_{i=0}^{k-2}a_i2^i,$$

故(4)式成立. 证毕.

有了(4)式，就很容易求出满足 $f(n)=n$ 且 $n\leqslant 1988$的解的个数了. 先将1988化成二进制得

$$11111000100,$$

它是一个十一位数. 明显地，在所有的 t 位二进制数中，颠倒数字后值仍不变的恰有

$$2^{\left[\frac{t-1}{2}\right]}\text{个},$$

这里$[x]$表不超过 x 的最大整数. 故在一位数到十位数中，满足 $f(n)=n$ 的值有

$$\sum_{t=1}^{10} 2^{\left[\frac{t-1}{2}\right]} = 2\sum_{i=0}^{4} 2^i = 2(2^5 - 1) = 62 \text{ 个};$$

在十一位数中有$2^{\left[\frac{10}{2}\right]}=2^5=32$个，但其中有且仅有两个大于1988，它们是

11111011111 和 11111111111.

故所求的满足 $f(n)=n$ 且 $n \leqslant 1988$ 的 n 值有

$$62 + 32 - 2 = 92 \text{ 个}.$$

（王鲁燕 解答）

4.［**分析与解答**］ 首先指出这样一桩基本事实：在 OXY 坐标平面上，如果一条连续曲线有一头在 X 轴的上方，另一头在 X 轴的下方，那么这条连续曲线必定要与 X 轴相交. 这一基本事实合乎人们的直观经验，容易为大家所接受（在大学的数学分析课程里，将给出这一事实的严格数学证明）. 我们承认这一基本事实，并将在下面的解题过程中用到它. 事实上，我们在中学数学讨论求根问题时经常用到这一点.

考察函数

$$f(x) = \sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} - \frac{5}{4}.$$

设 $l \in \{1,2,\cdots,69\}$，$x \in (l,l+1)$. 我们把函数 f 的表示式写成

$$f(x) = \sum_{k=1}^{l} \frac{k}{x-k} + \sum_{k=l+1}^{70} \frac{k}{x-k} - \frac{5}{4}.$$

容易看出，当 x 在开区间 $(l,l+1)$ 内增大变化时

$$\sum_{k=1}^{l} \frac{k}{x-k} \text{ 与 } \sum_{k=l+1}^{70} \frac{k}{x-k}$$

都减小（前者保持正值并减小，后者保持负值但绝对值增大）. 函数 f 在 $(l,l+1)$ 中是严格单调下降的. 对于 $x \in (l,l+1)$，当

$x \to l$ 时 $f(x) \to +\infty$，当 $x \to l+1$ 时 $f(x) \to -\infty$. 我们断定：存在唯一的 $\xi_l \in (l, l+1)$，使得 $f(\xi_l)=0$. 同样容易看出，函数 f 在 $(70, +\infty)$ 也是严格单调下降的. 在 $(70, +\infty)$ 范围内，当 $x \to 70$ 时 $f(x) \to +\infty$，当 $x \to +\infty$ 时 $f(x) \to -\frac{4}{5}$. 仿照上面的讨论又可断定：函数 f 在 $(70, +\infty)$ 范围内也只有唯一的零点 ξ_{70}. 另外，还容易看出，对于 $x<1$，应有 $f(x)<0$.

通过以上的讨论，我们得知，使得 $f(x) \geqslant 0$ 的实数 x 的集合是以下这些互不相交的区间的并集

$$(1, \xi_1], (2, \xi_2], \cdots, (69, \xi_{69}], (70, \xi_{70}].$$

这些区间的长度总和 S 等于

$$\sum_{k=1}^{70}(\xi_k - k) = \sum_{k=1}^{70}\xi_k - \sum_{k=1}^{70}k.$$

另一方面，我们注意到，方程 $f(x)=0$ 与以下的方程同解：

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-70) - \frac{4}{5}\sum_{k=1}^{70}\frac{k(x-1)(x-2)\cdots(x-70)}{x-k} = 0. \qquad (5)$$

上式左边是一个70次的多项式，它的所有各根之和应为

$$\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{70} = -a_1,$$

这里的 a_1 是(5)式左边多项式中 x^{69} 的系数. 通过计算，我们得到

$$a_1 = -\sum_{k=1}^{70}k - \frac{4}{5}\sum_{k=1}^{70}k$$

$$= -\frac{9}{5}\sum_{k=1}^{70}k.$$

由此又得到

$$S=\sum_{k=1}^{70}\xi_k-\sum_{k=1}^{70}k=-a_1-\sum_{k=1}^{70}k$$

$$=\frac{9}{5}\sum_{k=1}^{70}k-\sum_{k=1}^{70}k=\frac{4}{5}\sum_{k=1}^{70}k$$

$$=\frac{4}{5}\times\frac{70\times71}{2}=4\times7\times71$$

$$=28\times71=1988.$$

（张筑生 解答）

5.［**分析与解答**］ 记$\triangle ABD$及$\triangle ACD$的内心分别为O_1及O_2，记它们的内切圆半径分别为r_1及r_2，记$AC=b$, $AB=c$,

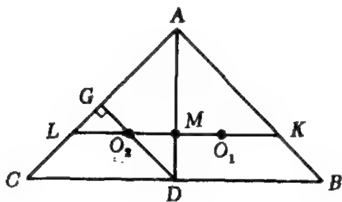


图 7

$\angle ABC=\alpha$，$\mathrm{tg}\alpha=b/c$.

注意到$\triangle CAD\backsim\triangle ABD$，相似比是$b:c$，于是$r_2/r_1=b/c=\mathrm{tg}\alpha$.

(1) 先讨论$\alpha=45°$这一简单情形(见图7).

设AD与直线O_1O_2相交于M，作$O_2G\perp AC$. 易知$AG=AM$,

$LG=r_2=MD$，于是 $AL=AD=b/\sqrt{2}$. 得到

$$T:S=AL^2:AC^2=1:2,\quad S=2T.$$

(2) 一般情形，不妨设$0<\alpha<45°$（见图8）.

设直线 O_1O_2与 BC 的延长线相交于 N. 记$\angle O_1NB=\beta$，有

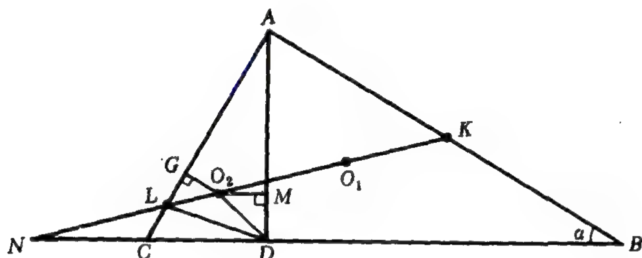


图 8

$\mathrm{tg}\beta=(r_1-r_2)/(r_1+r_2)$. 又有

$$\mathrm{ctg}(90°-\beta)=\mathrm{tg}\beta=\frac{1-r_2/r_1}{1+r_2/r_1}$$

$$=\frac{1-\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}\alpha}=\mathrm{ctg}(45°+\alpha),$$

由此推出二个锐角$90°-\beta$ 和$45°+\alpha$ 相等，即 $\alpha+\beta=45°$，$\angle AKL=45°$，$\triangle AKL$ 是等腰直角三角形.

我们不难证明仍有 $AL=AD$. 作 $O_2M\perp AD$，$O_2G\perp AC$，有 $LG=r_2=MD$，又有 $AG=AM$，导出 $AL=AD=b\cos\alpha$，

$$T=\frac{1}{2}(AL)^2=\frac{1}{2}b^2\cos^2\alpha,\quad S=\frac{1}{2}bc=\frac{1}{2}b^2\cdot\mathrm{ctg}\alpha.$$

由$0<\alpha<45°$，有$2\sin\alpha\cos\alpha=\sin2\alpha<1$. 由此推出$2\cos^2\alpha<$

$\operatorname{ctg}\alpha$，因此$2T<S$.

（杨晓兰 解答）

6.［分析与解答］ 解本题的基本思想是利用整除性质：若 s 整除 t（以下写作 $s|t$），则必有$|s|\leqslant|t|$或 $t=0$. 为了在具体问题中能应用这一性质常常要利用带余数除法. 本题答案是$(a^2+b^2)/(ab+1)$等于 a 和 b 的最大公约数（以下记作(a,b)）的平方，即$(a,b)^2$.

因 a,b 是对称的，故不妨设 $b\geqslant a$. 由带余数除法知，存在唯一的一对整数 m,r_1，使得

$$b=am+r_1,\quad -a/2<r_1\leqslant a/2. \tag{6}$$

由于 $b\geqslant a\geqslant 1$，故必有 $m\geqslant 1$. 由上式得

$$2\leqslant ab+1=a^2m+ar_1+1, \tag{7}$$

$$a^2+b^2=m(ab+1)+a^2+amr_1+r_1^2-m. \tag{8}$$

这样，$(ab+1)|(a^2+b^2)$就等价于

$$a^2m+ar_1+1\,|\,a^2+amr_1+r_1^2-m. \tag{9}$$

直观地看，除数似应比被除数的绝对值大，所以猜测式(9)应等价于

$$a^2+amr_1+r_1^2-m=0. \tag{10}$$

我们设法来证明这一点. 从式(10)推出式(9)是显然的. 下面来证明：从式(9)可推出式(10). 分 $m>1$和 $m=1$两种情形来讨论.

容易算出

$$\begin{aligned}a^2+amr_1+r_1^2-m=&-(a^2m+ar_1+1)\\&+(m+1)(a^2+ar_1-1)+r_1^2+2\\&>-(a^2m+ar_1+1),\end{aligned} \tag{11}$$

$$a^2+amr_1+r_1^2-m$$
$$=(a^2m+ar_1+1)-(m-1)(a^2-ar_1+1)+r_1^2-2. \tag{12}$$

当 $m>1$时，利用 $a^2-ar_1+1\geqslant 2$及

$$a^2-ar_1+1>r_1^2-2$$

（为什么），从式(11)和(12)推出

$$|a^2+amr_1+r_1^2-m|<a^2m+ar_1+1.$$

因此由整除性质知，从式(9)可推出式(10). 当 $m=1$时，若式(9)成立，则由式(12)可推出

$$a^2+ar_1+1\,|\,r_1^2-2. \tag{13}$$

由于$0\leqslant|r_1|\leqslant a/2$，所以当 $r_1\neq 0$时恒有

$$a^2+ar_1+1\geqslant a^2/2+1\geqslant 2r_1^2+1>|r_1^2-2|>0,$$

因而当式(13)成立时必有 $r_1=0$，进而由式(13)推出 $a=1$. 这样，$m=1$时必有 $r_1=0$，$a=1$，显见式(10)也成立.

显见，当 $r_1\geqslant 1$时式(10)不可能成立. 因此，式(9)成立时必有

$$-a/2<r_1\leqslant 0. \tag{14}$$

而这时式(10)可改写为

$$m=(|r_1|^2+a^2)/(|r_1|a+1).$$

综合以上讨论，我们证明了：若 $ab+1\,|\,a^2+b^2$，$b\geqslant a\geqslant 1$，则必有

$$m=\frac{a^2+b^2}{ab+1}=\frac{|r_1|^2+a^2}{|r_1|a+1}, \tag{15}$$

其中 r，m 由式(6)给出，且满足式(13). 此外，当 $r_1=0$时，$m=a^2=(a,b)^2$，即当 $r_1=0$时所要的结论已证明. 当 $r_1\neq 0$时，$|r_1|$，a 满足和 a，b 相同的条件，且有式(15)成立. 继续对$|r_1|$，a 进

行同样的讨论.这样不断进行下去,即利用式(6)形式的辗转相除法,最后可得一组数列

$$\{b,a\},\{|r_1|,a\},\{|r_2|,|r_1|\},\cdots,\{|r_l|,|r_{l-1}|\},$$

它们由下列式子给出:

$$\begin{cases} b = am + r_1, & -a/2 < r_1 \leqslant -1, \\ a = |r_1|m + r_2, & -|r_1|/2 < r_2 \leqslant -1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ |r_{l-2}| = |r_{l-1}|m + r_l, & -|r_{l-1}|/2 < r_l \leqslant -1, \\ |r_{l-1}| = |r_l|m, & \end{cases} \tag{16}$$

满足

$$m = \frac{a^2+b^2}{ab+1} = \frac{|r_1|^2+a^2}{|r_1|a+1} = \cdots = \frac{|r_l|^2+|r_{l-1}|^2}{|r_l||r_{l-1}|+1} = |r_l|^2.$$

这就证明了所要的结论.如果注意到最大公约数

$$(a,b) = (r_1,a) = (r_2,r_1) = \cdots = (r_l,r_{l-1}) = |r_l|,$$

就推出 $m=(a,b)^2$.

利用式(16)及 $m=|r_l^2|$,以及循环数列的知识,可以证明满足本题条件的全部正整数解 $a_k,b_k(b_k \geqslant a_k)$ 由下面的数列给出:

$$a_k = \frac{d}{\sqrt{d^4-4}}\left\{\left(\frac{d^2+\sqrt{d^4-4}}{2}\right)^k - \left(\frac{d^2-\sqrt{d^4-4}}{2}\right)^k\right\},$$

$$b_k = a_{k+1}, \quad k=1,2,\cdots,$$

其中 d 是任意给定的正整数(d^2相当于 m).

最后,请读者自己分析一下本题的这种解法是怎样想出来的,即 (A) 为什么想到要用形如式(6)的带余数除法,把条件 $ab+1|a^2+b^2$转化为条件(9)?如果用通常的带余数除法:b

$=al+s_1$, $0\leqslant s_1<a$，本题将怎样证明，比较两者的优劣.（B）条件(9)的等价条件(10)是怎样想到的？通过解本题应该深入体会带余数除法在解中学数学竞赛的初等数论题中的重要性，差不多可以说，绝大多数题都要灵活应用带余数除法，而这种应用都是同整除的最基本性质相联系的.

（潘承彪 解答）

为什么第29届奥赛第3题要用二进制来解？

设$[x]$是不超过x的最大整数. 利用题目的条件证明：对任意正整数n有

$$f(2n+1)-f(2n)=2\left\{f\left(2\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)-f\left(2\left[\frac{n}{2}\right]\right)\right\}.$$

反复应用这一结论，由上式及题目条件可推出：

$$f(2n+1)-f(2n)=2^{k+1},$$

其中k是适合条件$2^k\leqslant n<2^{k+1}$的整数. 由此及题中条件(1)，我们就容易想到要用二进制来解本题，并看出应有解答中的(4)式成立.

以上结论的证明是不困难的，请读者自己给出.

（潘承彪）

第二十九届IMO试题解答

何 宏 宇

1. [**分析与解答**] 题目条件比较强，思路也比较多. 经过探索，我们发现：P 点是整个平面的一个关键点，欲寻求 A，B，C 三点间关系，须将 P 点与之联系起来. O 点是图形的另一个关键点，是图形的对称中心，它将能够提供许多有关的信息和证题需要的条件.

(1) 首先由 $AP \perp BC$ 得到

$$AC^2 = AP^2 + PC^2, \quad AB^2 = AP^2 + PB^2,$$

$$BC^2 + CA^2 + AB^2 = 2(AP^2 + PC^2 + PB^2) + 2PC \cdot BP$$

(以下我们必须利用 O 点的性质). 利用 $OP = OA$，$OC = OB$ 以反映 O 点的几何属性似乎利少弊多，为了真正联系到距离的平方，产生出构造直角三角形这一非常自然的想法.

过点 O 作直线 m 垂直于 AP，交 AP 于中点 L；作点 B 关于直线 m 的对称点 B'（见图1).

$\because \quad AP \perp BC, \quad m \perp AP,$

$\therefore \quad BP \parallel m.$

故 $AB' \parallel m$ 且 $AB' = PB$，$\angle APB = 90°$，所以 $PBB'A$ 是一个矩形.

$\because \quad \angle PBB' = 90°, \quad BB' = AP,$

$\therefore \quad BC^2 + AP^2 = B'C^2 = \text{直径}^2 = 4R^2,$

亦即 $\quad AP^2 + BP^2 + CP^2 = 4R^2 - 2PC \cdot BP.$

再由圆内幂 $PC \cdot BP = R^2 - r^2$，于是

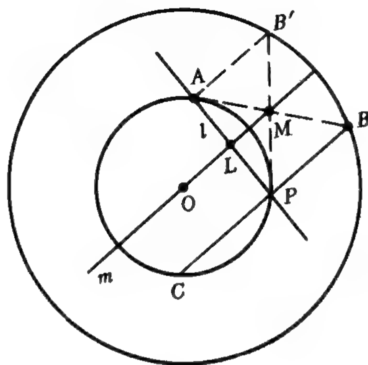


图 1

$$
\begin{aligned}
BC^2 + CA^2 + AB^2 &= 2(AP^2 + BP^2 + CP^2) + 2PC \cdot BP \\
&= 8R^2 - 2R^2 + 2r^2 \\
&= 6R^2 + 2r^2 = \text{定值}.
\end{aligned}
$$

（2） 欲求 AB 中点轨迹，仍需要将 A,B 与点 P 联系起来，因为 A,B 都是动点而 P 是定点.

我们寻求 AB 中点 M 与点 P 的关系，不难发现 M 为 PB' 的中点，B' 在大圆周上，因此点 M 在以 P 为位似中心，位似比为 $\frac{1}{2}$ 的变换下大圆的像上，即一半径为 $\frac{R}{2}$ 的圆 Q 上.

反之，对于以 OP 的中点为圆心的圆上任一点 K，连结 PK 并延长交大圆于 B'，则 K 为 PB' 的中点. 作点 B' 关于 OK 的对称点 B，B 必在大圆周上，且由作法知点 K 就是得到的 AB 的中点.

综上可知，AB 中点轨迹是以 OP 中点为圆心，$\frac{R}{2}$ 为半径的圆周.

2. [分析与解答]

(i)**分析条件** 因条件(b)最强,故从条件(b)入手. 令

$$A_i \cap A_j = \{a_{ij}\};(a_{ij} = a_{ji})$$
$$(i \neq j, i, j = 1,2,\cdots,2n+1.) \qquad (b')$$

由条件(c):对 A_i 中任一元素 $x \in B$,至少属于另一子集 $A_j(j \neq i)$,于是由(b′)知,$x = a_{ij}$ 即得

$$A_i \subseteq \{a_{ij} | j \neq i, j = 1,2,\cdots,2n+1\}$$
$$(i \in \{1,2,\cdots,2n+1\}). \qquad (c')$$

又由(b′)知

$$\{a_{ij} | j \neq i, j = 1,2,\cdots,2n+1\} \subseteq A_i.$$

故对任意 i, $A_i = \{a_{ij} | j \neq i, j = 1,2,\cdots,2n+1\}$. 再由(a)知 $|A_i| = 2n$,故对给定 i, $a_{ij}(j \neq i)$ 两两不同. 又由于条件(b)有

$$B = \bigcup_i A_i = \{a_{ij} | j < i, i = 2,3,\cdots,2n+1\},$$

且 B 中任意两个元素 $a_{i_1j_1}, a_{i_2j_2}$ 当且仅当 $i_1 = i_2, j_1 = j_2$ 时相同. 事实上根据(b′)知 $a_{i_1j_1} = a_{i_2j_2}$,有 $a_{i_1j_1} = a_{i_1j_2}$,故 $j_1 = j_2$,类似地 $i_1 = i_2$. 因由条件(a)有 $|A_i| = 2n$,于是

$$|B| = \frac{2n(2n+1)}{2} = n(2n+1).$$

(ii)**分析结论**(暂缓确定 n,下设 n 满足条件).

(1) 我们要么构造出具体的标法;要么用逻辑证明,证明标法的确存在. 但是由于集合元素已经非常确定,所以用构造法具有很大的优越性.

(2) 构造仅与 i,j 有关,抓住这一关键,我们可以进行直观的描述;将 i,j 用点表示;a_{ij} 用连接 $i,j(i \neq j)$ 的线段表示. 下面只须将 a_{ij}来染色,使从每一点 i 出发的$2n$ 条线段中恰

有 n 条染红色，n 条染蓝色.

(iii)**构造** 先寻求必要条件，即染色法存在 n 应满足什么条件. 因每点恰有 n 条线染红色. 所以总共应有 $n(2n+1)/2$ 条线染红色，故 n 必为偶数(我们再也没有发现不满足条件的偶数 n 了). 下面对偶数 n 进行构造，关键仍是数对 (i, j). 取 $i-j=b_{ij}(\bmod(2n+1))$，$(|b_{ij}|\leqslant n)$. b_{ij}为奇数时，a_{ij}染红色，即元素 a_{ij}标上1；b_{ij}为偶数时，a_{ij}染蓝色，即元素 a_{ij}标上0.

不难发现，每个 $i\leqslant 2n+1$ 的自然数，有 n 个元素 $a_{ij}(j\neq i)$ 标上1，n 个元素标上0. 即每个 A_i 恰含 n 个元素贴有标0的标签.

于是，n 为偶数时，命题成立.

3. [**分析与解答**]

(i) **分析结论** 设个数为 $F(1988)$. 一种想法是直接计算 $f(n)$，再利用 $f(n)$求 $F(1988)$. 另一种想法是不求 $f(n)$确定出 $F(1988)$，或讨论 $F(n)$的属性. 但后一种想法缺乏基础，什么条件都用不上，都得借助 $f(n)$. 因此应该求出 $f(n)$.

(ii) **分析条件** (怎样求 $f(n)$?) 只能用(1)，(2)，(3)三式不断迭代讨论奇偶性. 这一点抽象出来即用数学概念反映出来就是2进制或4进制. 事实上，2或4进制具有一定的等同性，所以，可以假设

$$n=(n_t n_{t-1}\cdots n_1 n_0)_2 \quad (n_i=0 \text{ 或 } 1).$$

下一步怎么办?不断迭代仍是一件麻烦事.

(iii) **解题** (1) 继续探索. 麻烦关键是在于条件将 $4n+1$ 与 $4n+3$ 区分开来，为了避免这一点，就应该寻求它们间共

同的属性，进行统一处理. 再回到条件中有

$$f(4n+3)-f(2n+1)=2(f(2n+1)-f(2n)),$$

$$f(4n+1)-f(2n)=2(f(2n+1)-f(2n)).$$

这样就达到了统一，使条件更宜于迭代. 从而

$$\begin{aligned}
&f(n_tn_{t-1}\cdots n_2n_11)_2)-f((n_tn_{t-1}\cdots n_1)_2)\\
&=2(f((n_tn_{t-1}\cdots n_21)_2-f((n_tn_{t-1}\cdots n_20)_2)\\
&=2^2(f((n_tn_{t-1}\cdots 1)_2)-f((n_tn_{t-1}\cdots 0)_2))\\
&=\cdots\cdots\\
&=2^{t-1}(f((11)_2)-f((10)_2))\\
&=2^tn_t \qquad (\text{注意到 } n_t=1)
\end{aligned}$$

为了避免分情况讨论最好将偶数情况统一起来：

$$f((n_tn_{t-1}\cdots n_2n_1n_0)_2)=f((n_tn_{t-1}\cdots n_2n_1)_2)+2^tn_0.$$

这样，再进行迭代最后得到

$$\begin{aligned}
f(n_tn_{t-1}\cdots n_2n_1n_0))&=n_0\cdot 2^t+n_1\cdot 2^{t-1}+\cdots\\
&\quad+n_{t-2}\cdot 2^2+f(\overline{1n_{t-1}})\\
&=n_0\cdot 2^t+n_1\cdot 2^{t-1}+\cdots\\
&\quad+n_{t-2}\cdot 2^2+n_{t-1}\cdot 2+1\\
&=(n_0n_1n_2\cdots n_{t-1}n_t)_2.
\end{aligned}$$

(2) 进行归纳证明(略).

(3) 求 $F(1988)$ $(1988=(11111000100)_2)$.

$$f(n)=n\Leftrightarrow n_t=n_0,n_{t-1}=n_1,\cdots,n_{t-i}=n_i(i=0,1,\cdots,t).$$

对于 $n\leqslant 1988$，当 t 是奇数 $2k-1$ 时，$n_{2k-1}=n_0=1,\cdots,n_k=n_{k-1}$. 这样的数有 2^{k-1} 个 $(k=1,2,3,4,5)$. 所以总共有

$$\sum_{k=1}^{5}2^{k-1}=2^5-1 \text{ 个数 } n\leqslant 1988 \text{ 且满足 } f(n)=n.$$

当 t 为偶数 $2k$ 时，则

$$n_{2k}=n_0=1,\cdots,n_{k+1}=n_{k-1},n_k=0\text{ 或 }1,$$

这样的数共2^{k-1}个. 故 $k\leqslant 5$时满足 $f(n)=n$ 的数有

$$\sum_{k=0}^{5}2^k=2^6-1.$$

在这些数中大于1988的有两个数即

$$(11111011111)_2,\quad (11111111111)_2.$$

所以

$$F(1988)=2^5-1+2^6-1-2=92.$$

4.［**分析与解答**］

(i)**分析条件**　观察函数 $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{70}\dfrac{k}{x-k}$ 的性质.

$$f'(x)=\sum_{k=1}^{70}(-k)/(x-k)^2<0\quad(x\neq k\text{ 时}).$$

(1) $x\in(-\infty,1)$ 时,易见 $f(x)<0$.

(2) $x\in(j,j+1)(j=1,2,\cdots,69)$ 时,当 $x>j$ 且 $x\to j$ 时,$f(x)\to+\infty$;当 $x<j+1$ 且 $x\to j+1$ 时,$f(x)\to-\infty$. $f(x)$ 在区间 $(j,j+1)$ 上单调递减.

(3) $x\in(70,+\infty)$ 时,易见 $f(x)>0$,且当 $x>70$ 且 $x\to 70$ 时,$f(x)\to+\infty$;当 $x\to+\infty$ 时,$f(x)\to 0$. $f(x)$在区间 $(70,+\infty)$ 上单调递减.

(上面的讨论已给函数一个非常精确的描述,剩下的是一些技巧性的步骤,不再涉及到路子是否正确.)

(ii)**解题**　由分析,在$(j,j+1)$中有唯一的一个 x_j 使得 $f(x_j)=\dfrac{5}{4}$,而在$(j,j+1)$上,使 $f(x)\geqslant\dfrac{5}{4}$ 的 x 即是区间$(j,x_j)(j=1,2,3,\cdots,69)$. 在$(70,+\infty)$上,存在唯一的一个 x_{70}

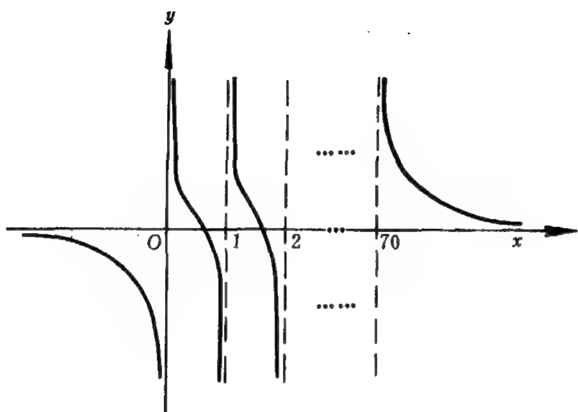


图 2

使得 $f(x_{70})=\frac{5}{4}$，而在 $(70,+\infty)$ 上，使 $f(x)\geqslant\frac{5}{4}$ 的 x 即是区间 $(70,x_{70}]$. 于是 $\{x|f(x)\geqslant\frac{5}{4}\}=\bigcup\limits_{k=1}^{70}(k,x_k]$，所以满足 $f(x)\geqslant\frac{5}{4}$ 的 x 的集合是70个互不相交的区间的并集. 它们长度和

$$D=\sum_{k=1}^{70}(x_k-k)=\sum_{k=1}^{70}x_k-\sum_{k=1}^{70}k.$$

x_k 是方程 $f(x)=\frac{5}{4}$ 的根即是

$$\begin{aligned}5(x-1)(x-2)\cdots(x-70)\\ =4((x-2)\cdots(x-70)\\ +2(x-1)(x-3)\cdots(x-70)\\ +\cdots+70(x-1)(x-2)\cdots(x-69))\end{aligned}$$

的根. 此多项式恰是70次，有70个根 $x_1,x_2,\cdots,x_{70}$. 故

$$\sum_{k=1}^{70} x_k = -\frac{a_{69}}{5} = -\left(5\sum_{i=1}^{70}(-i) - 4\sum_{i=1}^{70}(+i)\right)/5$$

$$= \frac{9}{5}\sum_{i=1}^{70} i.$$

于是

$$D = \frac{9}{5}\sum_{i=1}^{70} i - \sum_{k=1}^{70} k = \frac{4}{5}\sum_{i=1}^{70} i$$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{70 \times 71}{2} = 1988.$$

5.［分析与解答］

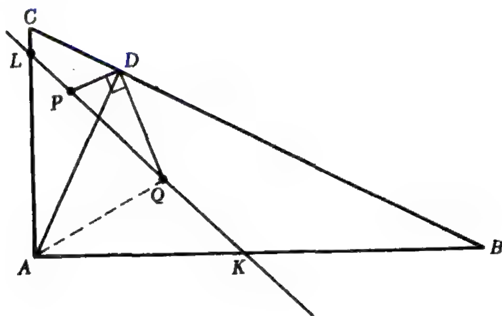


图 3

(i)**分析** 设 Q,P 分别为$\triangle ABD$,$\triangle ACD$ 的内心. 由于题目条件相对于结论是很强的,所以用解析的方法恐怕有些繁琐. 用平面几何的方法就必须抓住 D,P,Q 三个关键点,PQ,AD 两条关键的线及$\triangle DPQ$. 因为要达到结论,必须了解有关 K,L 的属性;要利用条件,必须注意到点 P,Q,D 的特性;要证明问

题又必须从条件推出结论. 所以，我们必须首先考察三角形 PDQ，将 P,Q 两点真正地联系起来.

(ii)**证题** 由$\triangle CDA$经过旋转相似变换变为$\triangle ADB$，P点变为Q点. 故

$$DP/DQ = DA/DB \quad 或 \quad DP/DA = DQ/DB,$$

以及

$$\angle PDQ = \angle CDA = 90°,$$

从而$\triangle PDQ \sim \triangle ADB$. 再注意到 P,Q 是内心就有

$$\angle PDA = \angle QDB = \angle PKA = 45° = \angle ADQ,$$

$$\angle DAQ = \angle KAQ,$$

故 $\triangle ADQ \cong \triangle AKQ$. 从而有 $AK = AD$.

这样

$$T = \frac{1}{2}AD^2 = \frac{AC^2 \cdot AB^2}{2BC^2}$$

$$= \frac{AC^2 \cdot AB^2}{2(AC^2 + AB^2)} \leqslant \frac{1}{4}AB \cdot AC$$

即

$$S \geqslant 2T$$

命题获证.

6. [**分析与解答**]

(i) **分析** 考察 $(a^2 + b^2)/(ab + 1)$ 这一个整数. 面临一个障碍就是 $a^2 + b^2$ 与 $ab + 1$ 都是 a,b 的二次多项式，很难用同余、整除的方法将它们连系起来. 这实际上表明 $(a^2 + b^2)/(ab + 1)$ 这个量很难描述，为此我们利用不等式的方法来描述它.

（ii）**解题**　由于 $(a^2+b^2)/(ab+1)$ 与 $\frac{b}{a}$ 或 $\frac{a}{b}$ 有关，不妨设 $b \geqslant a$，我们需要大致确定出 $(a^2+b^2)/(ab+1)$ 的范围。为了精确起见，令 $b = p_1 a + q_1 (0 < q_1 \leqslant a)$，这样就有

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \frac{a^2+b^2}{ab+1} = \frac{p_1^2 a^2 + 2p_1 q_1 a + q_1^2 + a^2}{p_1 a^2 + q_1 a + 1} \\
&= p_1 + \frac{p_1 q_1 a + q_1^2 + a^2 - p_1}{p_1 a^2 + q_1 a + 1} \\
&= p_1 + 2 - \frac{p_1 a(a-q_1) + q_1(a-q_1)}{p_1 a^2 + q_1 a + 1} \\
&\quad + \frac{(p_1-1)a^2 + p_1 + 2 + q_1 a}{p_1 a^2 + q_1 a + 1}.
\end{aligned}
$$

注意到

$$0 < q_1 \leqslant a, \quad p_1 \geqslant 1,$$

可得

$$p_1 < S_1 < p_1 + 2 \quad (q_1 > 0 \text{ 时}).$$

由 S_1 是整数，故 $S_1 = p_1 + 1$，即

$$b = S_1 a - (a - q_1).$$

这时，

$$[S_1 a - (a-q_1)]^2 + a^2 = [a(S_1 a - (a-q_1)) + 1]S_1,$$

即

$$S_1 = \frac{a^2 + (a-q_1)^2}{a(a-q_1)+1}.$$

再令 $a_1 = a - q_1$，则

$$\frac{a^2+b^2}{ab+1} = S_1 = \frac{a^2+a_1^2}{1+aa_1}.$$

类似地令

$$a = S_2 a_1 - a_2, \quad a_1 = S_3 a_2 - a_3 \cdots.$$

最终必有 $a_{t-1}=a_tS_{t+1}$，所以有

$$\frac{a^2+b^2}{ab+1}=S_1=\frac{a^2+a_1^2}{1+aa_1}=S_1$$
$$=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$=\frac{a_{t-2}^2+a_{t-1}^2}{1+a_{t-2}a_{t-1}}=S_t$$
$$=\frac{a_t^2+a_{t-1}^2}{1+a_ta_{t-1}}=S_{t+1}.$$

事实上，将 $a_{t-1}=S_{t+1}a_t$ 代入得

$$\frac{a_t^2+a_{t-1}^2}{1+a_ta_{t-1}}=\frac{a_t^2(S_{t+1}^2+1)}{1+a_t^2S_{t+1}}=S_{t+1}.$$

解出S_{t+1}有

$$S_{t+1}=a_t^2.$$

故

$$S_1=S_2=\cdots=S_{t+1}=a_t^2.$$

由此可知 $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ 为一个平方数，不难发现，a_t 正是 a,b 两数的最大公约数(辗转相除原理). 命题获证.

第二十九届IMO试题解答

王 健 梅

1. 解答 (1) 设 BC 弦心距为 x(如图1). 由题意知

$$BC^2+CA^2+AB^2=BC^2+AP^2+PC^2+BP^2+AP^2$$
$$=BC^2+2AP^2+(BP+CP)^2-2BP\cdot CP$$
$$=2\cdot(2BD)^2+2(2OD)^2-2PE\cdot PF$$
$$=8(R^2-x^2)+8x^2-2(R-r)(R+r)$$
$$=6R^2+2r^2 \text{ 是一个常数,}$$

因此 $$BC^2+CA^2+AB^2=6R^2+2r^2.$$

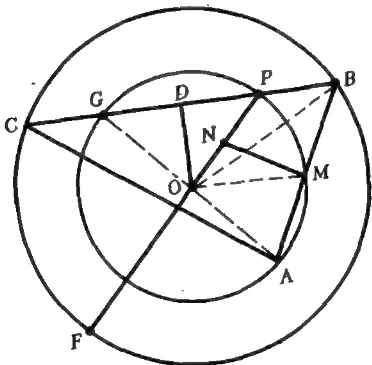


图 1

(2) 设 AB 中点为 M, OP 中点为 N, 则在 $\triangle ONM$ 与 $\triangle OGB$ 中,

$$ON=\frac{1}{2}OP=\frac{1}{2}OG,$$

$$OM = \frac{1}{2}BG,$$

$$\angle NOM = \angle OPG = \angle OGB,$$

所以

$$\triangle ONM \backsim \triangle OGB,\text{相似比为 } 1:2.$$

于是

$$NM = \frac{1}{2}OB = \frac{1}{2}R,$$

则 M 在以 OP 中点为圆心，半径为 $R/2$的圆上. 因此当 B 在大圆上变动一周时，M 就在该圆上变动一周.

2. 解答 先证 B 中每一个元素恰属于两个子集. 由条件(c)知，B 中每个元素在 A_i 中至少出现两次，所以有

$$2|B| \leqslant (2n+1)\cdot|A_i| = 2n(2n+1),$$

得出

$$|B| \leqslant n(2n+1).$$

另一方面，由容斥原理得

$$|B| = \sum_{i=1}^{2n+1}|A_i| - \sum_{i\neq j}|A_i \cap A_j| + \sum_{i\neq j\neq k}|A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{2n+1}|A_i| - \sum_{i\neq j}|A_i \cap A_j|$$

$$= 2n(2n+1) - C_{2n+1}^2 = n(2n+1),$$

(这里用了条件(b))，所以等号成立. 而这当且仅当对 $\forall\ i,j,k$，$A_i \cap A_j \cap A_k = \varnothing$ 才可能，所以 B 中每个元素恰属于两个子集.

考虑所有 A_i 中贴0的元素，共有 $n(2n+1)$个(可以重复计

算). 由于 B 中每一个贴0的元素恰属于两个子集，所以共有 $n(2n+1)/2$ 个不同的元素贴0，由此知 n 为偶数. 若 n 为偶数，可用归纳法证明存在符合要求的贴标签方法.

当 $n=2$ 时，不妨设五个子集为 (a,b,c,d)，(a,e,f,g)，(b,e,h,l)，(c,f,h,m)，(d,g,l,m). 把元素 a,b,f,l,m 贴0，易验证符合要求.

设 $n=k$ 时成立，则当 $n=k+2$ 时，共 $2(k+2)+1$ 个子集，每个子集含 $2(k+2)$ 个元素. 将 $A_1\cap A_i$，$A_2\cap A_i$ 中元素贴0（$i=5,6,\cdots,k+5$），$A_3\cap A_i$，$A_4\cap A_i$ 中元素贴0（$i=k+6,k+7,\cdots,2k+5$），**其余** $A_i\cap A_j$ 中元素贴1（$1\leqslant i\leqslant 4$，$5\leqslant j\leqslant 2k+5$），$A_1\cap A_2$ 中元素贴1，$A_1\cap A_3$ 贴1，$A_1\cap A_4$ 贴0，$A_2\cap A_3$ 贴0，$A_2\cap A_4$ 贴1，$A_3\cap A_4$ 贴0，则易验证 A_1,A_2,A_3,A_4 每个集合中恰好 $k+2$ 个元素贴了0，$A_5,A_6,\cdots,A_{2k+5}$ 中每个子集有两个贴0，两个贴1. 去掉集合 A_1,A_2,A_3,A_4 及 $A_5,A_6,\cdots,A_{2k+5}$ 每个集合中已贴标签的元素，剩下 $2k+1$ 个集合，每个集合中有 $2k$ 个元素，且符合条件(a)、(b)、(c)，由归纳假设，存在符合要求的贴标签方法，所以当 $n=k+2$ 时也存在符合要求的贴标签方法.

所以对所有偶数 n，存在符合要求的贴法.

4. 证明 当 $x<1$ 时，有

$$f(x)=\sum_{k=1}^{70}\frac{k}{x-k}-\frac{5}{4}<0,$$

$$\lim_{x\to n^-}f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to n^+}f(x)=+\infty\quad (n=1,2,\cdots,70),$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\frac{5}{4}.$$

由 $f(x)$ 连续性知，$f(x)$ 在每个区间 $(1,2)$，$(2,3)$，$\cdots$，$(69,70)$，

$(70,+\infty)$中有一根，记为$x_1,x_2,\cdots,x_{70}$. $f(x)$的根即为

$$g(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-70)f(x)$$

的根，而$g(x)$为70次多项式，首项系数为$-\frac{5}{4}$，则

$$g(x)=-\frac{5}{4}(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{70}),$$

x^{69}次项系数为

$$(1+2+\cdots+70)+\frac{5}{4}(1+2+\cdots+70)$$

$$=\frac{9}{4}(1+2+\cdots+70).$$

由韦达定理

$$x_1+x_2+\cdots+x_{70}=-\frac{9}{4}(1+2+\cdots+70)/(-\frac{5}{4})$$

$$=\frac{9}{5}\cdot(1+2+\cdots+70).$$

$f(x)\geqslant 0$的解集为$(1,x_1]\cup(2,x_2]\cup\cdots\cup(70,x_{70}]$，区间长度总和

$$d=\sum_{i=1}^{70}(x_i-i)=\sum_{i=1}^{70}x_i-\sum_{i=1}^{70}i$$

$$=(\frac{9}{5}-1)(1+2+\cdots+70)=1988.$$

5. 证明　设N,M分别是三角形ABD及ACD的内心，在AC上取点L'，使得$AL'=AD$，则在$\triangle ADM$和$\triangle AL'M$中(见图2)

$$AD=AL',\quad AM=AM,\quad \angle DAM=\angle MAL'$$

则

$$\triangle ADM\cong\triangle AL'M,\quad \angle AL'M=\angle ADM=45°.$$

图 2

设 $L'M$ 交 AB 于 K'，则 $\angle AK'M = 90° - \angle AL'M = 45°$，故

$$AK' = AL' = AD.$$

设$\angle K'AD$ 平分线交 $L'K$ 于 N'，连结 $N'D$，则在$\triangle K'AN'$和$\triangle DAN'$中

$$K'A = DA,\quad AN' = AN',\quad \angle K'AN = \angle N'AD.$$

所以有

$$\triangle K'AN \cong \triangle DAN',\quad \angle ADN' = \angle AK'N' = 45°,$$

于是 DN'是$\angle ADB$ 的平分线，N'为$\triangle ABD$ 的内心，N'与 N 重合. K'与 K 重合，L'与 L 重合.

设 G 为 BC 中点，则 $AG = \frac{1}{2}BC$，我们有

$$T = \frac{1}{2}AK \cdot AL = \frac{1}{2}AK' \cdot AL' = \frac{1}{2}AD^2,$$

$$S = \frac{1}{2}BC \cdot AD = AG \cdot AD \geqslant AD^2 = 2T.$$

奥赛归来

走向世界 迎接挑战

——忆二十九届 IMO

何宏宇 王健梅

国际数学奥林匹克(简称 IMO)是一项一年一度的中学生竞赛活动. 最早始于1959年,是由罗马尼亚发起的. 每年每个参赛国派出六名选手参加比赛. 比赛为期两天,共九个小时,每个参赛者须解答六道题,满分42分. 比赛决出金、银、铜牌和国家名次. 我国1986年首次正式派代表队参加,今年是第三次参赛. 1988年7月9日至21日,29届 IMO 在澳大利亚举行.

中国代表队一行九人,领队常庚哲教授,副领队兼总教练舒五昌副教授,观察员中国科协黄小年同志,及六名参赛队员. 7月9日,我们乘班机抵达澳洲第一大城市——悉尼,驻在新南威尔士大学,其它国家代表队也相继到来. 本次活动有许多亚太地区的国家参赛,正式队员来自49个国家和地区,共268名选手.

在悉尼的几天,澳方安排各国选手参观游览. 悉尼是座山城,濒临南太平洋,三面环海,风光绮丽. 7月的北半球正是炎炎夏日,可南半球的澳洲却是冬季. 据说,这里的植物都是冬天生长,夏天休眠,所以七月的悉尼仍是绿草如茵,鲜花盛开,有如春光明媚.

我们一同来到了举世闻名的悉尼歌剧院,这座著名的建筑群由数个贝壳形的结构组成,耸立在碧波荡漾的海边. 阳光

下，衬着湛蓝的天空，更显得洁白和高雅，别有一番情趣. 在动物园，我们看到了许多南半球特有的动物. 时值"国宝"大熊猫"霄霄""菲菲""旅经"悉尼，各国选手排着长长的队，想目睹熊猫的风采，并争先留念. 我们还到了绿树成荫的皇家植物园，古色古香的唐人街，在高耸入云的悉尼塔上，俯瞰悉尼全城，山水相依，真是一座美丽的城市.

几天的活动中，我们已结识了一些新朋友，彼此用不太熟悉的英语交谈. 交换纪念品. 中国的熊猫纪念章在这里大受欢迎，甚至连我们自己也没能佩戴这种纪念章. 同时，我们惊奇地发现，参赛者中有许多华人选手. 除来自大陆的以外，还有来自香港地区的陈迅，叶能钧，梁永康，游淑娴等六人，新加坡的林竞毅，郑荣潜，张国伟，杨永耀，颜业圣等六人，巴西的宋山伟，澳大利亚的陶哲轩，菲律宾的李雄炳，许荣坤，以及美国、芬兰的华人，我们用相同的语言交谈，互相鼓励，倍感亲切.

14日早晨，我们乘车从悉尼来到澳大利亚首都——堪培拉. 通过几天的休整，我们逐渐适应下来，以充沛的精力来迎接15，16日的考试.

14日下午，在堪培拉高等教育学院体育馆举行了开幕式. 第二天，考试开始了，每个人都怀着激动的心情走进考场，考试在紧张的气氛中进行，参赛者既须有雄厚的数学功底，又须正常发挥才可能取得好成绩，解题既要思维活跃，又要小心翼翼，每个参赛队员都全力以赴.

比赛的两天，除了考试都是平静的生活. 第一天的考试结束后，每个人都需要消除疲劳，积蓄精力，并且保持思想稳定，以对待第二天的考试. 由于国内进行了集中训练，我们的水平

都得以正常发挥，考试完，大家相互接触了一下，了解了些情况，我们满怀信心但又紧张焦急地等待成绩的揭晓．

接下来的两天，评判工作紧张地进行着．我们继续在堪培拉进行一些游览文娱活动．堪培拉也是一座多山的城市，由于缺少河流，修筑了一座大型人工湖，使这座城市生色不少．我们参观了澳大利亚的国会大厦，国家图书馆，和战争纪念馆，还有一个宇宙观测中心，并在国家野生动物园里看到了许多严禁捕猎的野生珍贵动物，如袋鼠、树袋熊等．同时，各国选手共同的生活也是非常丰富多彩的，我们和法国选手们一同庆祝他们的国庆日；高唱 HAPPY BIRTHDAY 为华裔澳大利亚选手陶哲轩庆祝他的十二岁生日．陶哲轩虽是本届比赛最年轻的选手，却已是第三次参加 IMO，前两次分别获得铜牌、银牌，本次比赛终于如愿以偿，获得金牌，所有的人都为他高兴，并期待这位华裔神童的早日成功．

随着评判工作的进行，比赛的结果陆续在大厅的记分牌上陈列出来，苏联队以总分217分名列第一；中国队和罗马尼亚队以总分201分并列第二；西德队总分174分，名列第四；越南第五；美国第六．至此，大局完全确定．我国选手何宏宇是本次比赛中得满分42分的五名选手之一，获得金牌，陈晞以41分获金牌，韦国恒，王健梅，查宇涵，邹钢各获一枚银牌．20日下午，在首都堪培拉剧院举行了隆重的颁奖仪式，澳大利亚总理霍克发表了演说，并亲自为金牌获得者颁奖．本届 IMO 共颁发金奖十七枚，四十来枚银牌和六十多枚铜牌，32分至42分者获金牌，23分至31分者获银牌，14分至22分者获铜牌．保加利亚一选手由于对第六题给出简明的解法获特别奖．苏联队共获四枚金牌两枚银牌，中国和罗马尼亚分获两枚金牌四枚银

牌，西德、东德、瑞典、越南、法国、奥地利、以色列、加拿大、澳大利亚等国各获一枚金牌. 新加坡队和香港队第一次参赛就获团体总分第18名和第24名的好成绩. 本次比赛华人选手共获三枚金牌，六枚银牌，四枚铜牌，炎黄子孙所表现的聪明才智是值得海内外华人共同高兴的.

其间，中国驻澳使馆的同志一直很关心我们，教育参赞解其钢同志曾亲自到驻地看望我们，并带我们参观了中国驻澳使馆和教育处，当我们在异国的土地上再次看到飘扬的五星红旗，真是无比的激动，我们在庄严的国徽下合影留念，并在大使馆我们吃到了一次多日来想望的真正的祖国饭菜.

在澳大利亚的两星期，我们得到了向导理查德的最热情的帮助，使我们深深地感受到了澳大利亚人民的友好情谊. 这段时光将是我们永生难忘的.

第一次出国参加这样的重大国际比赛，我们有一种光荣的责任感. 我们代表的是全国两千万中学生，要体现出我国中学生的聪明才智和优良品质. 我们和各国选手真诚交往，互相学习. 这次活动获得了极大的成功.

在澳大利亚虽然只有短短的两星期，仍使我们感到收获巨大. 看到澳大利亚两百周年来的建设成果，我们深深地体会到了建设祖国的迫切需要，感受到了振兴中华的历史史命. 经历了这样一次考验，使我们一定要在今后的学习生活中以更大的热情和勇气去迎接新的挑战.

二十九届奥赛的历程已成为过去. 当我们展望未来的时候，应该清楚地看到，我们和部分先进国家还存在着一定的差距. 随着 IMO 活动的蓬勃发展，在走向世界的进程中，我们将面临严重的挑战，这就需要我们广大的有志于竞赛的同学为

之奋斗拼搏.我们深信“辛勤的汗水总会换来累累硕果”,只要每一个同学都能以更大的信心和勇气来面对这一挑战,我国的中学数学竞赛水平定将在国际竞争中走在世界最前列.

最后,我们预祝我国选手在今后的国际数学奥林匹克竞赛中取得更大的成功,为国争光.同时,希望有更多的同学通过竞赛活动显露出才华,促进我国数学事业的繁荣和发展.

初等数学问题[①](1)

1. a,b,c,d 四个数，它们不全是1，也不全是0. 我们称这有序的四数为第一组数. 按下面法则，可以陆续得到第二组，第三组，…新的数组. 法则是：

前一组数中的第一个与第二个数之积，第二个与第三个数之积，第三个与第四个数之积，第四个与第一个数之积分别当做相邻后一组中的第一、第二、第三、第四个数.

试证明：从第二组数开始的任何一组数，都不与第一组数相同.

2. 设 $m,n\in \mathbf{N}$，求证

$$S_{(m,n)}=\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}+\cdots+\frac{1}{m+n}$$

总不是整数.

3. 试证明：一个6×6的方格棋盘不可能被一个3-L 型板和十一个3×1型板完全覆盖. 其中“3-L”型板为图1所示的图形，“3×1型板”为图2所示的图形.

4. 函数 $f(n)$ 定义在 $\mathbf{N}$ 上并且在 $\mathbf{N}$ 中取值，且对于任何 $n\in \mathbf{N}$，都有

$$f(n+1)>f[f(n)].$$

求证：对于任何 $n\in \mathbf{N}$，都有 $f(n)=n$.

---

① 这个专栏是由北京大学附中陈剑刚主持下编写的. 每期都由具有丰富的中学数学教学经验的教师给出若干有趣味性的数学问题，在下一期给出这些问题的解答. ——编者注

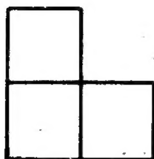


图 1

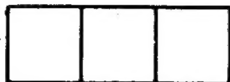


图 2

5. 46个国家派代表队参加亚洲数学竞赛，比赛共4个题.结果统计如下：

第1题对的学生235人；

第1、2两题都对的59人；

第1、3两题都对的29人；

第1、4两题都对的15人；

四个题全对的有3人.

又知道有人做对了前三个题，但没有做好第四个题.

求证：存在一个国家，这个国家派出的选手中至少有4人恰只做对了第一个题目.

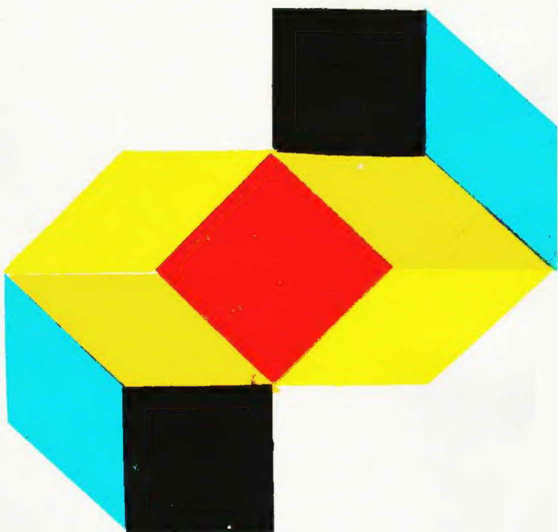
（周沛耕选编，陈剑刚校）

数学小丛书——智慧之花

(2)

《果园问题与邮票问题》主要目录

- NIM游戏
- 我们能使数学易懂吗?
- 1988年国际数学奥林匹克竞赛试题解答



ISBN 7-301-01002-8/O·171
定价：2.85 元